ЗАДАЧИ ЗА ДВОЙКИ КРИВИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН В ПРОФИЛИРАНАТА ПОДГОТОВКА ПО МАТЕМАТИКА

Даниела Йорданова Георгиева[1], Марта Костадинова Теофилова[2]
[1]Природо-математическа гимназия „Академик Боян Петканчин“, Хасково
[2]Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив

PROBLEMS FOR PAIRS OF SECOND-DEGREE CURVES IN THE PROFILED TRAINING IN MATHEMATICS

Daniela Yordanova Georgieva[1], Marta Kostadinova Teofilova[2]
[1]Boyan Petkanchin High School of Natural Sciences and Mathematics, Haskovo
[2]Plovdiv University „Paisii Hilendarski“, Plovdiv

** Авторите изказват благодарност към проф. д-р Пенка Рангелова за идеята на настоящата статия, както и за ценните съвети и напътствия при нейното разработване. Първият автор благодари на проект МУПД25-ФМИ-015 към ФНИ на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“.*

Abstract: In the profiled mathematics preparation, students study the analytical definition of four second-degree curves – circle, ellipse, hyperbola and parabola, which are collectively called conic sections, since they are obtained when a rotational conical surface intersects a plane at different angles between the axis of the cone and the plane. In the 11th grade, students are introduced to the definitions and equations of the four curves and study their basic properties and elements – center, axes, vertices, foci, directrix, etc. . In the 12th grade, students consider tangents to second-degree curves and learn their equations. In the educational literature, quite a few problems are proposed for each of the conic sections separately, but problems combining two or more curves are less common. The purpose of this work is to offer ideas for conducting a generalized lesson on the study material for conic sections with problems for two or more second-degree curves, which are interconnected by relations for some of their elements. We believe that solving such problems helps students in a deeper understanding of the educational material, as well as in the consolidation and permanent mastery of knowledge and skills for working with the apparatus of analytical geometry. In the work, we offer problems on the material for second-degree curves, studied in the profiled preparation in the 11th grade.

Keywords: ellipse, hyperbola, parabola, circle, second degree curve

1. Основни сведения за конични сечения

Известно е [1], [2], че при пресичането на ротационна конична повърхнина с равнина, която не минава през върха на повърхнината, се получават четири различни криви от втора степен – елипса, окръжност, хипербола или парабола, известни под общото наименование конични сечения. Припомняме определенията, елементите и уравненията на тези криви в декартова координатна система. Окръжност с център точката $O'(a;b)$ и радиус $R>0$ се задава с уравнението

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (1)$$

Елипса се нарича равнинна крива, която е геометрично място на точките, за които сборът от разстоянията до две дадени точки е постоянен. Тези точки се наричат фокуси на елипсата. Координатите на точките от тази крива удовлетворяват зависимостта

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0), \qquad (2)$$

която се нарича канонично уравнение на елипса. Кривата пресича координатните оси в точките $A_{1,2}(\pm a;0)$ и $B_{1,2}(0;\pm b)$, наречени върхове на елипсата. Пресечната точка $A_1A_2\cap B_1B_2=O$ наричаме център на елипсата, а отсечките $A_1A_2=2a$ и $B_1B_2=2b$ – съответно голяма и малка ос на елипсата. Величината $c=\sqrt{a^2-b^2}$ при $a>b$ и $c=\sqrt{b^2-a^2}$ при $b>a$ се нарича линеен ексцентрицитет на елипсата. При $a>b$ фокусите на елипсата са точките $F_{1,2}(\pm c;0)$, а при $b>a$ са $F_{1,2}(0;\pm c)$. Ако $a=b$, то елипсата (2) е окръжност с център координатното начало и радиус a.

Хипербола наричаме крива, която е геометрично място на точките в равнината, за които абсолютната стойност на разликата от разстоянията до две дадени точки е константа. Двете точки се наричат фокуси на хиперболата. Координатите на точките от това геометрично място удовлетворяват уравнението

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0), \qquad (3)$$

което се нарича канонично уравнение на хипербола. Точките $A_{1,2}(\pm a;0)$ се наричат върхове на хиперболата, а точка O – неин център. Величината $c=\sqrt{a^2+b^2}$ се нарича линеен ексцентрицитет на хиперболата. Фокусите на хиперболата (3) са точките $F_{1,2}(\pm c;0)$. Правите с уравнения $y=\pm\frac{b}{a}x$ се наричат асимптоти на хиперболата. Хиперболата с уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ се нарича спрегната на хиперболата (3) и нейните върхове и фокуси са съответно точките $B_{1,2}(0;\pm b)$ и $F_{1,2}(0;\pm c)$. При $a=b$ хиперболата (3) се нарича равномерна.

Парабола се нарича равнинна крива, която е геометрично място на точките, намиращи се на равни разстояние от дадена точка, наречена фокус, и дадена права, неминаваща през фокуса, наречена директриса. Каноничното уравнение на парабола, симетрично разположена относно абсцисната ос, има вида

$$y^2=2px\ (p\neq 0). \qquad (4)$$

Фокусът F и директрисата g на параболата (4) са съответно $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ и $g: x=-\frac{p}{2}$. Познатата графика на квадратната функция $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ също е парабола, но симетрична относно правата $x=-\frac{b}{2a}$.

2. Задачи за двойки криви от втора степен за обобщен урок

В условията на следващите задачи съчетаваме две или повече криви от втора степен чрез зависимости за някои техни елементи. Предлагаме задачи за всяка от шестте двойки различни криви, които могат да се получат при комбиниране на четирите конични сечения. В условията на част от задачите вместо конкретни числени стойности сме заложили да участват буквени коефициенти (параметри), за да мотивираме учениците да решават задачи с по-общи конструкции, съдържащи елементи на доказателствен характер, като по тази начин целим да стимулираме развиването на техните аналитични и изследователски способности [3].

Задача 1. Намерете уравнението на парабола, симетрична относно оста Ox, ако върхът ѝ съвпада с координатното начало, а разстоянието от фокуса на параболата до центъра на окръжността $x^2+y^2-6x+6y=7$ е равно на 5.

Решение: Търсеното уравнение е от вида (4), където фокусът на параболата е $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Чрез допълване до точен квадрат достигаме до нормалния вид на уравнението на окръжността $(x-3)^2+(y+3)^2=25$, откъдето $R=5$. Тъй като и разстоянието по условие е 5, следва, че фокусът F лежи на окръжността. Тогава $\left(\frac{p}{2}-3\right)^2+9=25$, откъдето $p=14$ или $p=-2$. Като решение на задачата получаваме две параболи с уравнения $y^2=28x$ или $y^2=-4x$.

Задача 2. Намерете уравнението на парабола, разположена симетрично относно Ox, ако параболата минава през пресечните точки на окръжността $x^2+y^2-12y=0$ и правата, която е ъглополовяща на II и IV квадрант.

Решение: Решаваме система от уравненията $\left|\begin{matrix} x^2+y^2-12y=0 \\ y=-x \end{matrix}\right.$. Така установяваме, че общите точки на окръжността и правата са $(0;0)$ и $(-6;6)$. Уравнението на парабола, симетрична относно Ox, е от вида (4). Тъй като параболата минава през точката $(-6;6)$, то от (4) намираме $p=-3$. Следователно уравнението на кривата е $y^2=-6x$.

Задача 3. Намерете пресечните точки на параболата $y^2=4px$ $(p>0)$ и окръжност с център във фокуса на параболата, допираща се до нейната директриса. Докажете, че триъгълникът с върхове общите точки на двете криви и пресечната точка на директрисата с оста на параболата е правоъгълен.

Решение: Фокусът на дадената парабола е с координати $F(p;0)$, а уравнението на директрисата е $g: x=-p$. Уравнението на окръжност k с център F е $k: (x-p)^2+y^2=R^2$, но щом тя се допира до директрисата, то $R=2p$, откъдето $k: (x-p)^2+y^2=4p^2$. Сега решаваме системата от уравненията двете криви и намираме пресечните им точки. Достигаме до квадратното уравнение $x^2+2px-3p^2=0$ с корени $x_1=-3p$ и $x_2=p$. Тъй като по условие $p>0$, то пресечните точки на параболата и окръжността лежат в първи и четвърти квадрант. Следователно за тях $x=p$, откъдето намираме $A(p;-2p)$ и $B(p;2p)$. Пресечната точка на директрисата и Ox е $C(-p;0)$. Ще установим, че ΔABC е правоъгълен (с прав ъгъл при върха C), като докажем, че скаларното произведение $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=0$. Пресмятаме $\overrightarrow{AC}(-2p;2p)$ и $\overrightarrow{BC}(-2p;-2p)$. Тогава

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0$, с което задачата е решена. На учениците могат да се дадат конкретни стойности за p и да се предложи да намерят лицето на правоъгълния триъгълник.

Задача 4. Намерете уравненията на окръжност и парабола с ос на симетрия, успоредна на Oy, които минават през точките $A(-2;-6)$, $B(-1;0)$ и $C(3;4)$. Намерете разстоянието между върха на параболата и центъра на окръжността.

Решение: Координатите на центъра на окръжността $D(m;n)$ намираме чрез системата

$\begin{cases}(m+2)^2+(m+6)^2=(m+1)^2+n^2\\(m-3)^2+(n-4)^2=(m+1)^2+n^2\end{cases} \Leftrightarrow D\left(\frac{15}{2};-\frac{9}{2}\right)$. Тогава уравнението на търсената окръжност е $\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\left(y+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{185}{2}$. Парабола с ос на симетрия, успоредна на Oy, има уравнение от вида $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$. За намирането му решаваме следната система линейни уравнения за трите неизвестни коефициента a, b и c:

$\begin{cases}4a-2b+c=-6\\a-b+c=0\\9a+3b+c=4\end{cases}$

с решение $a=-1$, $b=3$, $c=4$. Уравнението на параболата е $y=-x^2+3x+4$, а нейният връх е $V\left(\frac{3}{2};\frac{25}{4}\right)$. Разстоянието между точките D и V е $\left|\overrightarrow{DV}\right|=\frac{5\sqrt{97}}{4}$.

Задача 5. Определете неизвестния буквен коефициент m в уравнението на параболата $y=x^2+m$ така, че параболата да пресича елипсата $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ $(a>b>0)$ в три различни точки.

Решение: I начин – аналитично решение чрез уравненията на двете криви. Нека да заместим y от уравнението на параболата в уравнението на елипсата. Така достигаме до параметричното биквадратно уравнение $a^2x^4+(2ma^2+b^2)x^2+m^2a^2-a^2b^2=0$. За да има това уравнение точно три различни корена, единият от тях трябва да бъде равен на нула, т.е. при $m^2a^2-a^2b^2=0$, или $m=\pm b$, а другите два трябва за бъдат реални числа. Оттук получаваме условието $m<-\frac{b^2}{2a^2}$. Последното неравенство е изпълнено само за $m=-b$.

II начин – чрез геометрични разсъждения. На учениците предлагаме да използват динамичен геометричен софтуер като GeoGebra или Desmos за онагледяване на различните случаи. Върхът на параболата е точката $(0;m)$. Имайки предвид симетрията на параболата относно оста Oy и симетрията на елипсата относно Ox и Oy, се вижда, че при $m<-b$ двете криви се пресичат в четири различни точки, при $-b<m<b$ в две точки, при $m=b$ в една точка (допират се външно), при $m>b$ нямат общи точки, а при $m=-b$ имат точно три общи точки. Задача 5 може да се преформулира за конкретни числени стойности на буквените коефициенти, например така

Задача 6. Намерете уравнението на окръжността през пресечните точки на елипсата $x^2+25y^2=25$ и параболата $y=x^2-1$.

Отговор. Пресечните точки са $A(0;-1)$, $B\left(\frac{7}{5};\frac{24}{25}\right)$, $C\left(-\frac{7}{5};\frac{24}{25}\right)$, а уравнението на окръжността е $x^2+\left(y-\frac{12}{25}\right)^2=\left(\frac{37}{25}\right)^2$.

Задача 7. Елипса минава през средата на хордата, която параболата $y^2=4x$ отсича от правата $l: x+y-3=0$. Намерете уравнението на елипсата, ако тя е симетрично разположена относно координатните оси и разстоянието между фокусите ѝ е 12.

Решение: Нека търсената елипса има уравнение от вида (2). От условието получаваме $a^2-b^2=36$. Намираме краищата A и B на хордата, като решаваме системата от уравненията на параболата и правата. Така достигаме до $A(1;2)$ и $B(9;-6)$. Средата на AB е точката $M(5;-2)$. Тогава от (2) получаваме $25b^2+4a^2=a^2b^2$. От двете условия за коефициентите от уравнението на елипсата намираме $a^2=45$, $b^2=9$. Тогава търсеното уравнение е $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{9}=1$.

Задача 8. Намерете уравнението на хиперболата, минаваща през пресечните точки на параболата $x^2=2y$ и правата $x-2y+2=0$, ако осите на хиперболата съвпадат с координатните оси и фокусите на хиперболата лежат на абсцисната ос.

Отговор: $5x^2-4y^2=4$.

Сред задачите, в условията на които участват взаимосвързани елипса и хипербола, интерес представляват кривите със съвпадащи фокуси (наричат се съфокусни), както и случаят, когато кривите са с размени фокуси и върхове от фокалната си ос. На учениците може да се предложи да докажат следните:

Лема 1. Елипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и хипербола $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$ са съфокусни, точно когато коефициентите в уравненията им удовлетворяват зависимостта

$$a^2-b^2=m^2+n^2. \qquad (5)$$

Доказателство: Формула (5) се установява от определението за фокуси на двете криви.

Лема 2. Хиперболата с върхове във фокусите на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ и фокуси във върховете от Ox на същата елипса има уравнение

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (6)$$

Доказателство: Върховете на елипсата $(\pm a;0)$ са фокусите на хиперболата, а фокусите на елипсата $(\pm\sqrt{a^2-b^2};0)$ са върховете на хиперболата. Тогава, ако хиперболата се задава с уравнението $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$, то $m^2=a^2-b^2$ и $m^2+n^2=a^2$. Оттук следва (6).

Задача 9. Намерете уравнението на елипсата, чиито фокуси съвпадат с фокусите на хиперболата $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{3}=1$, ако търсената крива минава през точката $M(3;-1)$.

Решение: Нека елипсата има уравнението (2). Тогава поради (5) имаме $a^2-b^2=8$ и $\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$. От последните две уравнения получаваме, че $a^2=12$ и $b^2=4$.

Задача 10. Дадена е елипсата $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Намерете уравнението на хипербола, чиито фокуси съвпадат с фокусите на дадената елипса, ако една от асимптотите на хиперболата сключва ъгъл $30°$ с положителната посока на абсцисната ос.

Решение: Нека търсеното уравнение е от вида (3). От условието на задачата и (5) имаме $a^2+b^2=16$. Освен това $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Тогава намираме, че $a^2=12$ и $b^2=4$, откъдето уравнението е $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

Задача 11. Дадена е елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b>0$. Намерете: а) уравнението на равнораменна хипербола, чиито фокуси съвпадат с фокусите на дадената елипса; б) пресечните точки на елипсата и хиперболата, както и уравнението на кривата, която ги съдържа.

Решение: а) Нека търсената равномерна хипербола има уравнение $x^2-y^2=m^2$, където $m>0$. Тогава от установената по-горе зависимост (5) за съфокусни елипса и хипербола имаме $2m^2=a^2-b^2$. Следователно хиперболата се задава с уравнението $x^2-y^2=\frac{a^2-b^2}{2}$. б) Чрез решаване на системата от уравненията на двете криви установяваме, че те се пресичат в четирите точки с координати $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}};\pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. Разстоянието от всяка от тези точки до координатното начало O е равно на $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Следователно четирите точки са равноотдалечени от точката O, т.е. лежат на окръжността с център O и радиус $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, т.е. на окръжността $x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{2}$.

Задача 12. Намерете уравнението на хипербола, чиито върхове съвпадат с фокусите на елипсата $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$, а фокусите ѝ съвпадат с върховете на същата елипса.

Решение: Като вземем предвид (6), намираме $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$.

Задача 13. Дадена е елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b>0$. Намерете уравнението на: а) окръжността, вписана в четириъгълника от върховете на елипсата; б) уравнението на хипербола с върхове в пресечните точки на окръжността от а) и Ox, ако фокусите на хиперболата съвпадат с върховете на елипсата.

Решение: Четириъгълникът от върховете на елипсата е ромб с дължина на страната $\sqrt{a^2+b^2}$ и следователно в него може да се впише окръжност. Центърът на тази окръжност е точката O, а радиусът r може да се намери чрез две от формулите за лице на ромб $S=\frac{2a.2b}{2}=2r\sqrt{a^2+b^2}$. Тогава уравнението на окръжността е $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

б) Уравнението на хиперболата е $\frac{(a^2+b^2)}{a^2b^2}x^2-\frac{(a^2+b^2)}{a^4}y^2=1$.

Задача 14. Намерете уравнението на елипса с фокална ос Oy, която минава през пресечната точка на хиперболата $x^2-y^2=m^2$ $(m>0)$ и правата $x+y-m=0$, ако фокусите на двете криви съвпадат.

Решение: Уравнението на елипсата е от вида (2), но тъй като фокусите ѝ лежат върху Oy, то $b > a > 0$ и линейният ексцентрицитет е $c^2 = b^2 - a^2$. Тъй като той е равен на екцентрицитета на хиперболата, то получаваме $b^2 - a^2 = 2m^2$, откъдето $b^2 = 2m^2 + a^2$. Пресечната точка на хиперболата и правата е върха на хиперболата $A(m; 0)$. От условието тази точка да удовлетворява (2) намираме $a = m$. Следователно елипсата има уравнение $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{3m^2} = 1$.

Задача 15. Два от върховете на елипса и един от фокусите ѝ образуват равностранен триъгълник. Намерете уравнението на елипсата, ако радиусът на окръжността през нейния център и два от върховете ѝ е равен на $\sqrt{5}$.

Решение: Тъй като върховете на елипсата $B_1(b; 0)$, $B_2(-b; 0)$ и фокусът $F_1(c; 0)$ са върхове на равностранен триъгълник, то страната на триъгълника е $2b$ и $OF_1 = \sqrt{3}b$. Следователно линейният ексцентрицитет на елипсата е $c = \sqrt{3}b$, откъдето $a^2 = 4b^2$. Според условието на задачата имаме окръжност определена от три точки – началото на координатната система и два от върховете на елипсата. Следователно окръжността минава през връх от голямата и връх от малката ос. Нека тези точки са $A_1(a; 0)$ и $B_1(b; 0)$. Тъй като $\sphericalangle B_1OA_1 = 90°$, то диаметърът на окръжността е $A_1B_1 = \sqrt{b^2 + a^2} = 2\sqrt{5}$. Така достигаме до системата $\begin{vmatrix} a^2 = 4b^2 \\ a^2 + b^2 = 20 \end{vmatrix}$ с решение $b^2 = 4$, $a^2 = 16$. Следователно уравнението на елипсата е $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Задача 16. Окръжност с център координатното начало и минаваща през фокусите F_1 и F_2 на хиперболата $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ пресича асимптотите на хиперболата съответно в точките M, P и N, Q. Намерете: а) уравнението на окръжността; б) периметъра и лицето на четириъгълника $MNPQ$.

Решение: а) Намираме фокусите на дадената хипербола $F_1(13; 0)$ и $F_2(-13; 0)$, откъдето уравнението на окръжността е $x^2 + y^2 = 169$.

б) Уравненията на асимптотите са съответно $y = \frac{5}{12}x$ и $y = -\frac{5}{12}x$. Тогава пресечните точки на окръжността с асимптотите са $M(12; 5)$, $P(-12; -5)$, $N(12; -5)$ и $Q(-12; 5)$. Четирите точки образуват правоъгълник със страни 24 и 10, периметър и лице съответно 68 и 240.

Задача 17. Две окръжности са разположени така, че всяка от тях минава през центъра на другата. а) Запишете уравненията на окръжностите, ако центровете им лежат върху ординатната ос и са симетрично разположени относно координатното начало; б) Намерете уравнението на елипса, чиито върхове са центровете на двете окръжности и пресечните точки на окръжностите; в) Намерете уравнението на равнораменна хипербола, чиито върхове са центровете на окръжностите.

Решение: а) Нека $O_1(0; m)$ и $O_2(0; -m)$, $m > 0$, са центровете на двете окръжности. Тогава техните радиуси са с дължина $2m$, а уравненията им имат съответно вида $k_1: x^2 + (y - m)^2 = 4m^2$ и $k_2: x^2 + (y + m)^2 = 4m^2$.

б) Нека търсеното уравнение е от вида (2). Два от върховете на елипсата са $(0; \pm m)$, а останалите два ще намерим от системата $\begin{vmatrix} x^2 + (y - m)^2 = 4m^2 \\ x^2 + (y + m)^2 = 4m^2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow (\pm\sqrt{3}m; 0)$. Тогава търсената елипса има уравнение $\frac{x^2}{3m^2} + \frac{y^2}{m^2} = 1$.

в) Тъй като върховете на търсената хипербола са от оста Oy, то нейното уравнение е от вида $y^2 - x^2 = a^2$ $(a > 0)$. От условието хиперболата да минава през точките $(0; \pm m)$ намираме $y^2 - x^2 = m^2$.

Задача 18. В параболата $y^2 = 2px$, $p > 0$, е вписан ΔABC, така че т. C съвпада с върха на параболата, а фокусът на параболата е ортоцентърът на ΔABC. а) Намерете координатите на върховете на ΔABC и лицето S на ΔABC; б) Намерете уравнението на окръжността, описана около ΔABC; в) Ако т. A' и B' са симетрични съответно на A и B относно ординатната ос, то намерете уравнението на елипсата, вписана в правоъгълника $A'ABB'$. Намерете координатите на нейните фокуси; г) Намерете уравнението на хиперболата с върхове във фокусите на елипсата от подточка в), ако фокусите ѝ са пресечните точки на AB и $A'B'$ с абсцисната ос.

Решение: а) Върхът на параболата е $C(0; 0)$, а фокусът и ортоцентърът на триъгълника е $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. Щом ортоцентърът лежи на абсцисната ос, то правата AB е перпендикулярна на нея, което означава, че върховете на ΔABC имат координати $A(x_0; y_0)$ и $B(x_0; -y_0)$, $x_0, y_0 > 0$ (ΔABC е равнобедрен). От условието, че точките A и B лежат върху параболата имаме $y_0^2 = 2px_0$. Освен това поради $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{AC} = 0$ получаваме $x_0\left(\frac{p}{2} - x_0\right) + y_0^2 = 0$. Сега от последните две условия намираме $x_0 = \frac{5p}{2}$. Тогава $A\left(\frac{5p}{2}; \sqrt{5}p\right)$ и $B\left(\frac{5p}{2}; -\sqrt{5}p\right)$ и лицето на ΔABC е $S = \frac{x_0.2y_0}{2} = \frac{5\sqrt{5}p^2}{2}$.

б) Центърът D на окръжността трябва да лежи на абсцисната ос. Тогава D е пресечната точка на Ox със симетралата на страната AC (или BC). Симетралата на AC е правата с уравнение $5x + 2\sqrt{5}y - \frac{45p}{4} = 0$. Следователно $D\left(\frac{9p}{4}; 0\right)$. Уравнението на търсената окръжност е $\left(x - \frac{9p}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{81p^2}{16}$.

в) Точките са $A'\left(-\frac{5p}{2}; \sqrt{5}p\right)$ и $B'\left(-\frac{5p}{2}; -\sqrt{5}p\right)$. Търсим елипса с уравнение от вида (2), където $a = \frac{5p}{2}, b = \sqrt{5}p$. Намираме $\frac{4x^2}{25p^2} + \frac{y^2}{5p^2} = 1$ с фокуси $F_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{5}p}{2}; 0\right)$.

г) Търсим хипербола с уравнение от вида (3), като знаем, че $a^2 = \frac{5p^2}{4}$ и $a^2 + b^2 = \frac{25p^2}{4}$. Тогава търсеното уравнение е $4x^2 - y^2 = 5p^2$.

3. Задачи за двойки криви от втора степен за извънкласни форми на работа

За извънкласни форми на работа предлагаме едно продължение на изложените дотук идеи чрез запознаване на учениците с уравненията на елипса и хипербола с център, различен от координатното начало, по аналогия с уравнението на окръжност (1). Нека $O'(x_0; y_0)$ е произволна точка. Тогава елипса и хипербола с център точката O' и оси на симетрия правите през O' с уравнения $y = y_0$ и $x = x_0$ се задават съответно с

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \ (a, b > 0). \quad (7)$$

Аналогично може да се разглежда и уравнение на парабола с връх точката $O'(x_0; y_0)$ и ос на симетрия правата $y = y_0$

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), (p \neq 0). \quad (8)$$

Уравненията (7) и (8) могат да бъдат изведени от каноничните уравнения на трите криви чрез транслация. Нека произволна точка M има координати $M(x; y)$ относно координатната система Oxy и координати $M(x'; y')$ относно координатната система $O'x'y'$, получена от Oxy чрез транслация, определена от вектора $\overrightarrow{OO'}(x_0; y_0)$. Последното означава, че осите $O'x'$ и $O'y'$ са успоредни съответно на Ox и Oy. Поради $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ имаме $x' = x - x_0$ и $y' = y - y_0$. Тогава, ако елипса, хипербола или парабола е зададена в координатната система $O'x'y'$ с каноничното си уравнение, съответно (2), (3) или (4), то спрямо Oxy същата крива ще се задава аналитично съответно чрез (7) или (8).

Задача 19. Намерете уравнението на: а) елипса, допираща се до координатните оси в точките $(5; 0)$ и $(0; 3)$, ако осите на елипсата са успоредни на Ox и Oy; б) хипербола с оси, успоредни на Ox и Oy, ако фокусите на хиперболата съвпадат с тези на елипсата от а), а върховете на хиперболата са средите на отсечките от центъра и фокусите на елипсата; в) парабола, симетрична относно Ox, ако върхът ѝ е точката $(6; 0)$ и параболата минава през десния фокус на елипсата от а).

Решение: а) Тъй като два от върховете на елипсата са допирните точки $(0; 3)$ и $(5; 0)$, то осите на кривата имат уравнения $y = 3$ и $x = 5$. Следователно центърът на елипсата е $O'(5; 3)$. Другите два върха намираме като симетричните точки на $(0; 3)$ и $(5; 0)$ точки относно O', т.е. $(10; 3)$ и $(5; 6)$. Тогава голямата и малката ос на елипсата са съответно $2a = 10$ и $2b = 6$. Следователно, съгласно (7), уравнението на елипсата е $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$.

б) Фокусите на елипсата (хиперболата), определена с уравнението (7), са точките с координати $F_{1,2}(x_0 \pm c; y_0)$, където $y = y_0$ е фокалната ос на кривата. Следователно фокусите на елипсата от а) и тези на търсената хипербола са $F_1(1; 3)$ и $F_2(9; 3)$. Оттук следва, че центърът на хиперболата ще съвпада с центъра на елипсата $O'(5; 3)$. Тогава върховете на хиперболата са средите на отсечките $O'F_1$ и $O'F_2$, т.е. точките $A_1(3; 3)$ и $A_2(7; 3)$. Фокалната ос на хиперболата е с дължина $2a = A_1A_2 = 4$. Следователно, съгласно (5) и (7), уравнението на хиперболата е $\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{12} = 1$.

в) Тъй като Ox е оста на параболата, а върхът ѝ е $(6; 0)$, то съгласно (8) уравнението на параболата е от вида $y^2 = 2p(x - 6)$. Понеже параболата минава през десния фокус $F_2(9; 3)$ на елипсата, намираме $p = \frac{3}{2}$. Така получаваме $y^2 = 3(x - 6)$.

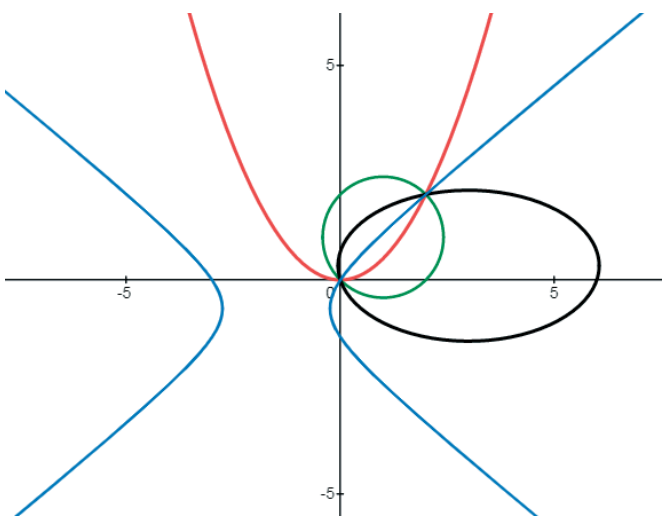
Задача 20. Дадено е семейството от криви от втора степен, дефинирани с уравненията $x^2 - 2y + m(y^2 - 2x) = 0$, където $m \in \mathbb{R}$. Определете вида на кривите в зависимост от стойностите на параметъра m [4].

Решение: При $m = 0$ уравнението има вида $y = \frac{x^2}{2}$ и задава парабола. Нека $m \neq 0$. Чрез отделяне на точни квадрати за променливите уравнението приема следния еквивалентен вид $(x - m)^2 + a\left(y - \frac{1}{m}\right)^2 =$

$\frac{m^3+1}{m}$. Тогава при $m > 0$ $(m \neq 1)$ кривите ще бъдат елипси с център $O'\left(m; \frac{1}{m}\right)$ и оси, успоредни на координатните оси, определени от уравненията

$$\frac{(x-m)^2}{\frac{m^3+1}{m}} + \frac{\left(y-\frac{1}{m}\right)^2}{\frac{m^3+1}{m^2}} = 1. \qquad (9)$$

При $m > 1$ фокалната ос е успоредна на Ox, а при $0 < m < 1$ на Oy. При $m = 1$ уравнението (9) задава окръжност с център $(1; 1)$ и радиус $\sqrt{2}$. При $m < 0$ и $m \neq -1$ кривите са хиперболи, като при $m < -1$ фокалната им ос е успоредна на Ox, а при $-1 < m < 0$ на Oy. Когато $m = -1$, уравнението на кривите приема вида $x^2 + 2x - y^2 - 2y = 0$ и лявата му страна може да се разложи в произведение на два линейни множителя по следния начин $(x - y)(x + y + 2) = 0$. В този случай кривата се състои от двете прави $x - y = 0$ и $x + y + 2 = 0$, пресичащи се в точката $(-1; -1)$. Крива от втора степен, съдържаща прави, се нарича изродена. Предлагаме на учениците да визуализират разгледаните по-горе случаи чрез динамичен геометричен софтуер. На Фигура 1 чрез Desmos са изобразени елипсата, получена при при $m = 3$, окръжността при $m = 1$, параболата при $m = 0$ и хиперболата при $m = -1.5$.



Фигура 1. Чертеж към Задача 20

Заключение

Представеният набор от задачи показва връзката между четирите конични сечения в контекста на аналитичната геометрия. Интегрирането на повече от една крива от втора степен в една задача подпомага учениците в консолидирането на знанията им за конични сечения и ги насърчава да развиват уменията си за анализ и синтез. Настоящата статия е разработена с потенциал за надграждане в учебната програма за 12. клас чрез включване на задачи за допирателни към криви от втора степен. Считаме, че предложените идеи допринасят за развиването на аналитичното мислене и изследователския подход при учащите, като ги насърчават към използване на векторно-координатния метод.

References:

1. Tonov, I., I. Sharkova, M. Hristova, Matematika za 11. klas – profilirana podgotovka, Regalia 6, Sofia, 2020, ISBN 978-954-745-330-2.
2. Stewart, J., Essential Calculus, 2nd ed., Cengage Learning, 2012, ISBN · 9781133112297
3. Sobolev, S.K., V. Ya. Tomashpolsky, A. O. Golosov, Some problems on second order curves with parameter, Current Problems of Teaching Mathematics at Technical University, (10), 92-97, ISSN 2307-5430, 2023, DOI: 10.25206/2307-5430-2023-10-92-97.
4. Modenov, P., A. Parchomenko, Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii, Nauka, Moska, 1976.