ЕДНО ЗАНЯТИЕ В ПРОФИЛИРАНАТА ПОДГОТОВКА ПО МАТЕМАТИКА В 11. КЛАС ЗА ВРЪЗКАТА МЕЖДУ ЗНАНИЯТА ЗА ВЕКТОРИ И АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

Даниела Йорданова Цветкова[1], Марта Костадинова Теофилова[2]
[1] Природо-математическа гимназия „Академик Боян Петканчин“, Хасково
[2] Факултет по математика и информатика, Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив

A LESSON IN THE PROFILED PREPARATION IN MATHEMATICS IN THE 11TH GRADE ON THE RELATION BETWEEN THE KNOWLEDGE OF VECTORS AND ANGEBRAIC EQUATIONS

Daniela Yordanova Tsvetkova[1], Marta Kostadinova Teofilova[2]
[1] 'Academician Boyan Petkanchin' High School of Science and Mathematics
[2] Faculty of Mathematics and Informatics, University of Plovdiv Paisii Hilendarski

Работата е подкрепена от проект СП23-ФМИ-008, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ при Пловдивския университет „П. Хилендарски“. Авторите благодарят на проф. д-р Пенка Рангелова за ценните идеи, съвети и препоръки при разработването на статията.

Abstract: *With the present work, we would like to share our experience with a generalized lesson on vector operations in the profiled preparation in mathematics in the 11th grade. The purpose of this lesson is to reinforce students' acquired knowledge by using intra-subject connections between algebra and geometry. The proposed problems for linear and metric operations with vectors are solved by applying some of the before studied properties of functions and methods for solving equations and systems of equations. Problems on linear combinations of vectors, linear dependence and independence, scalar product and perpendicularity of vectors are considered, the solving of which leads to different types of rational, irrational or transcendental equations.*
Keywords: *vector, equation, scalar product, collinearity, perpendicularity of vectors*

С представената разработка искаме да споделим опита си с проведен обобщен урок върху действия с вектори в профилираната подготовка по математика в 11. клас [1], [2]. Целта на това занятие е да затвърди придобитите знания от учениците чрез използване на вътрешно-предметни връзки между учебния материал по алгебра и геометрия. Предложените задачи за линейни и метрични действия с вектори се решават чрез прилагане на част от изучените свойства на функции и методи за решаване на уравнения и системи уравнения. Разглеждат се задачи за линейни комбинации на вектори, линейна зависимост и независимост, скаларно произведение и перпендикулярност на вектори, при решаването на които се достига до различни видове рационални, ирационални или трансцендентни уравнения.

В началото на занятието припомняме основни свойства на действията с вектори, които ще използваме при решаване на задачите, а именно [1], [2]:

1) Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, т.е. неколинеарни, ако условието $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0},\ \lambda, \mu \in R$, е изпълнено, точно когато $\lambda = \mu = 0$.

2) Векторите $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ са линейно зависими, т.е. колинеарни, точно когато $\vec{b} = \lambda\vec{a},\ \lambda \in R$, което е еквивалентно на условието $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. Тогава векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни $\Leftrightarrow\ \lambda > 0$ и разнопосочно колинеарни $\Leftrightarrow\ \lambda < 0$.

3) Скаларното произведение $\vec{a}\vec{b}$ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се пресмята съгласно формулата $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Скаларният квадрат на произволен вектор $\vec{a}$ се намира от равенството $\vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2$, а дължината на $\vec{a}$ се получава чрез $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Ако $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$, то $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ и $\vec{a}^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2$.

4) Ненулевите вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ са перпендикулярни, точно когато $\vec{a}\vec{b} = 0$, т.е. $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$.

Задача 1. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са неколинеарни вектори, за които е изпълнено равенството

$(x+1)\vec{a} + (y^2 + y - 5)\vec{b} = (2y+5)\vec{a} + (x-7)\vec{b}$, където $x, y \in R$. Намерете x и y.

Решение: След преобразуване чрез прехвърляне на всички събираеми в лявата страна на равенството и привеждане на коефициентите в линейната комбинация на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, даденото равенство е еквивалентно на

$(x - 2y - 4)\vec{a} + (y^2 + y - x + 2)\vec{b} = \vec{0}$.

Тъй като вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, то съгласно свойство 1), горното равенство е еквивалентно на следната система уравнения

$$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ y^2 + y - x - 2 = 0. \end{cases}$$

След заместване на $x = 2y + 4$ във второто уравнение, достигаме до квадратното уравнение $y^2 - y - 2 = 0$ с корени $y_1 = -1,\ y_2 = 2$. Следователно решенията на системата са $x = 2,\ y = -1$ и $x = 8,\ y = 2$. С тази задача припомняме знанията за решаване на системи уравнения от втора степен. След получаването на системата, с учениците е проведена дискусия относно методи за решаване на такива системи и по-конкретно на системи, в които едно от уравненията е от първа степен, а другото – от втора степен. Отбелязано е, че освен чрез заместване, получената система може да се реши и чрез събиране.

Задача 2. Намерете стойностите на реалното число p, за които векторите $\vec{a}(\lg p + 5; 2)$ и $\vec{b}(8; \lg p - 1)$ са колинеарни.

Решение: От условието на задачата се вижда, че $p > 0$. Тук използваме свойство 2), което е необходимо и достатъчно условие за линейна зависимост на два вектора. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, точно когато е в сила условието

$\frac{\lg p + 5}{8} = \frac{2}{\lg p - 1}$.

Последното равенство е еквивалентно на уравнението $\lg^2 p + 4\lg p - 21 = 0$. Полагаме $\lg p = t$ и решаваме $t^2 + 4t - 21 = 0$. Корените на последното уравнение са $t_1 = -7$ и $t_2 = 3$, откъдето следва, че $\lg p = -7$ и $\lg p = 3$. Така намираме $p_1 = 10^{-7} = \frac{1}{10^7}$ и $p_2 = 10^3 = 1000$. С тази задача припомняме един основен метод за решаване на уравнения – чрез полагане и свеждане до рационално (квадратно) уравнение, както и решаване на основни логаритмични уравнения. Припомняме също така, че дефиниционната област на аргумента x на функцията $y = \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$, е $x > 0$.

Задача 3. Даден е векторът $\vec{a}\left(2; 3^{\frac{1}{\log_4 3}}\right)$. Нека векторът $\vec{b}$ е колинеарен на вектора $\vec{a}$, като $|\vec{b}| = 4\sqrt{5}$. Ако $\vec{b}$ образува тъп ъгъл с ординатната ос, то намерете векторите $\vec{b}$ и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, както и дължината на $\vec{c}$.

Решение: Най-напред ще опростим израза във втората координата на вектора $\vec{a}$. За тази цел първо припомняме на учениците следните важни свойства на логаритмите:

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ и $a^{\log_a b} = b$, където $a, b > 0,\ a, b \neq 1$. Сега, съгласно тези свойства, имаме $3^{\frac{1}{\log_4 3}} = 3^{\log_3 4} = 4$ и следователно $\vec{a}(2; 4)$. Тъй като векторът $\vec{b}$ е колинеарен на $\vec{a}$, то от свойство 2) следва, че

$\vec{b}(2\lambda; 4\lambda)$, $\lambda \in R$. Тогава $|\vec{b}| = \sqrt{4\lambda^2 + 16\lambda^2} = 2\sqrt{5}|\lambda|$, откъдето $|\lambda| = 2$. Така намерихме $\lambda_1 = 2$ или $\lambda_2 = -2$. Следователно дотук за вектора $\vec{b}$ имаме две възможности: $\vec{b}_1 = 2\vec{a} = (4; 8)$ или противоположния му вектор $\vec{b}_2 = -2\vec{a} = (-4; -8)$. Сега използваме свойство 3) и по-точно, че $\cos\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ за произволни ненулеви вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Следователно знакът на $\cos\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ се определя от знака на скаларното произведение $\vec{u}\vec{v}$. Ординатната ос Oy е колинеарна на единичния вектор $\vec{e}_2(0; 1)$. Пресмятаме $\vec{b}_1\vec{e}_2 = 8$ и $\vec{b}_2\vec{e}_2 = -8$. Следователно векторът $\vec{b}_1$ сключва остър ъгъл с Oy, а противоположният му вектор $\vec{b}_2$ сключва тъп ъгъл с Oy. Тогава $\vec{b} = \vec{b}_2 = (-4; -8)$. Остава да пресметнем вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (-2; -4)$, откъдето $|\vec{c}| = 2\sqrt{5}$.

Задача 4. Намерете единичен вектор $\vec{e}$, който е еднопосочно колинеарен с вектора $\vec{a}(6; 8)$.

Решение: I начин. Нека $\vec{e}(x; y)$ е търсеният вектор. Тъй като $|\vec{e}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ и $\vec{e}$ е колинеарен на $\vec{a}$, то за координатите на $\vec{e}$ получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{8}. \end{array}\right.$$

От второто уравнение имаме $y = \frac{4}{3}x$ и след заместване в първото уравнение, намираме $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = -\frac{3}{5}$. Тъй като $\vec{e}$ е еднопосочно колинеарен на $\vec{a}$, то $x = \frac{3}{5}$, откъдето $y = \frac{4}{5}$. Следователно $\vec{e}\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

II начин. Векторът $\vec{e}$ може да бъде получен директно от формулата $\vec{e} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\vec{a}|}$, където $\vec{a} \neq \vec{0}$. Пресмятаме $|\vec{a}| = 10$ и следователно $\vec{e}\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$. Коментираме с учениците, че процесът на получаване на еднопосочно колинеарен единичен вектор на даден ненулев вектор $\vec{a}$ се нарича нормиране на $\vec{a}$, както и че по втория начин по-бързо се достига до желания резултат.

Следват няколко задачи, свързани с пресмятане на скаларно произведение на вектори, зададени с координати, и използването му за установяване на перпендикулярност на вектори. В тези задачи участват неизвестни величини в координатите на векторите и за намирането им се достига до рационални уравнения от различни степени, ирационални или трансцендентни уравнения, с което се цели да се припомнят основните методи за тяхното решаване.

Задача 5. Намерете вектора $\vec{c}$, който е перпендикулярен на $\vec{a}(2; -3)$, ако скаларното му произведение с вектора $\vec{b}(1; 2)$ е равно на 14.

Решение: Нека $\vec{c}(x; y)$. Задачата ще сведем до решаване на система от две уравнения от първа степен за неизвестните координати x и y. От условието за перпендикулярност на $\vec{a}$ и $\vec{c}$ получаваме $\vec{a}\vec{c} = 2x - 3y = 0$. Второто условие ни дава $\vec{b}\vec{c} = x + 2y = 14$. Така достигаме до системата

$$\left|\begin{array}{l} 2x - 3y = 0 \\ x + 2y = 14 \end{array}\right.$$

с единствено решение $x = 6, y = 4$. Следователно $\vec{c}(6; 4)$.

Задача 6. Дадени са векторите $\vec{a}(-1; m + 1)$ и $\vec{b}(3; m - 1)$, където $m \in R$. Намерете стойностите на m, за които $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са перпендикулярни.

Решение: Задачата съдържа елементи от предходната и се решава с аналогични разсъждения. Учениците самостоятелно използват свойство 4), съгласно което $\vec{a} \perp \vec{b}$, точно когато $\vec{a}\vec{b} = -3 + (m + 1)(m - 1) = 0$, откъдето достигат до $m^2 = 4$ с решения $m = \pm 2$.

Задача 7. Намерете стойностите на $p \in R$, за които векторите $\vec{a}(p^2; 6 - p^2)$ и

$\vec{b}(p^2 + 1; 6)$ са перпендикулярни.

Решение: Пресмятаме $\vec{a}\vec{b} = p^2(p^2 + 1) + 6(6 - p^2) = p^4 - 5p^2 + 36$. Тогава $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow p^4 - 5p^2 + 36 = 0$. Припомняме решаването на биквадратно уравнение. Полагаме $p^2 = u \geq 0$. Решаваме уравнението $u^2 - 5u + 36 = 0$, откъдето $u_1 = 9$ и $u_2 = -4$. Само $u_1 = 9$ е решение на биквадратното уравнение и следователно $p^2 = 9$, откъдето намираме $p = \pm 3$.

Задача 8. Намерете стойностите на реалното число p, за които векторите $\vec{a}(p^3; 1 - 3p^2)$ и $\vec{b}(2; 1)$ са перпендикулярни.

Решение: Пресмятаме $\vec{a}\vec{b} = 2p^3 + 1 - 3p^2$. Следователно $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow 2p^3 + 1 - 3p^2 = 0$. Уравнението може да се реши с разлагане, например да се запише в еквивалентния вид $2p^3 - 2p^2 - p^2 + 1 = 0$, откъдето чрез следното групиране на събираемите

$$2p^2(p - 1) - (p - 1)(p + 1) = 0$$

се достига до $(p - 1)^2(2p + 1) = 0$. Тогава корените му са $p = 1$ и $p = -\frac{1}{2}$.

С учениците е направен коментар, че уравнението може да се реши и чрез търсене на рационален корен с теоремата на Безу и схема на Хорнер, като е направена препоръка първо да направят проверка дали числата ± 1 са корени.

Задача 9. Векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ са единични и образуват ъгъл $60°$. Разглеждаме векторите $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$. Намерете:

А) дължините на диагоналите на успоредник, построен върху векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Б) стойностите на x, за които векторите $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c} = x^2.\vec{m} - 3x.\vec{n}$ са перпендикулярни, където $\vec{c} \neq \vec{0}$.

Решение: А) Диагоналите d_1 и d_2 на успоредника, построен върху векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, се определят от векторите $\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$. Пресмятаме

$\overrightarrow{d_1}^2 = (3\vec{m} - \vec{n})^2 = 9\vec{m}^2 - 6\vec{m}\vec{n} + \vec{n}^2$, $\overrightarrow{d_2}^2 = (\vec{m} + 3\vec{n})^2 = \vec{m}^2 + 6\vec{m}\vec{n} + 9\vec{n}^2$.

От условието на задачата намираме: $\vec{m}^2 = \vec{n}^2 = 1$ и $\vec{m}\vec{n} = |\vec{m}||\vec{n}| \cos \sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{1}{2}$. Следователно $\overrightarrow{d_1}^2 = 9 - 6.\frac{1}{2} + 1 = 7$ и $\overrightarrow{d_2}^2 = 1 + 6.\frac{1}{2} + 9 = 13$. Така получаваме $|\vec{d_1}| = \sqrt{7}$ и $|\vec{d_2}| = \sqrt{13}$.

Б) Пресмятаме скаларното произведение

$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{c}\vec{d_1} = (3\vec{m} - \vec{n})(x^2.\vec{m} - 3x.\vec{n}) = 3x^2.\vec{m}^2 - (9x + x^2)\vec{m}\vec{n} + 3x.\vec{n}^2 =$

$= 3x^2 - \frac{1}{2}(9x + x^2) + 3x = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x)$.

Тогава $\vec{c} \perp \vec{d_1} \Leftrightarrow \vec{c}\vec{d_1} = 0 \Leftrightarrow x(5x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = \frac{3}{5}$. При $x = 0$ векторът $\vec{c} = \vec{0}$ и този случай не е решение на задачата. Така достигаме до извода, че $x = \frac{3}{5}$ е решение на задачата.

Задача 10. Ако е известно, че $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{a} - \vec{b} = (9; 5)$, $\vec{c}(3; 4)$ и $\vec{d}(3^{2x}; 40.3^{x-1} - 12)$, то намерете дължината на вектора $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и стойностите на $x \in R$, за които $\vec{d}$ и $\vec{k}$ са перпендикулярни.

Решение: Нека $\vec{b}(b_1; b_2)$. Тогава $\vec{a} - \vec{b} = (1 - b_1; 2 - b_2)$. От $\vec{a} - \vec{b} = (9; 5)$ по условие получаваме $9 = 1 - b_1$ и $5 = 2 - b_2$. Следователно $b_1 = -8$, $b_2 = -3$, откъдето $\vec{b}(-8; -3)$. Тогава $\vec{k} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (-4; 3)$ и $|\vec{k}| = 5$.

Сега пресмятаме скаларното произведение $\vec{d}\vec{k} = -4.3^{2x} + 3(40.3^{x-1} - 12)$. Следователно $\vec{d} \perp \vec{k} \Leftrightarrow 3^{2x} - 30.3^{x-1} + 9 = 0$. Така достигаме до показателно уравнение, което се решава с полагането $3^x = t > 0$ и свеждане до квадратното уравнение $t^2 - 10t + 9 = 0$. Корени на последното уравнение са $t_1 = 1$ и $t_2 = 9$. Следователно от $3^x = 1$ получаваме $x_1 = 0$, а от $3^x = 9$ получаваме $x_2 = 2$.

Задача 11. Намерете стойностите на реалните числа x и α, за които $\vec{a}\vec{b} = -6$, където $\vec{a}\left(2\sin 2\alpha\,; 2^{x-2\sqrt{x}}\right)$ и $\vec{b}\left(\frac{1}{\sin 2\alpha};\ -1\right)$.

Решение: Припомняме на учениците дефиниционната област на функцията $y = \sqrt{x}$, която е $x \geq 0$. Освен това $\sin 2\alpha \neq 0$, откъдето $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, k е цяло число. При тези условия пресмятаме $\vec{a}\vec{b} = 2 - 2^{x-2\sqrt{x}}$ и от $\vec{a}\vec{b} = -6$ достигаме до показателното уравнение $2^{x-2\sqrt{x}} = 8$, еквивалентно на ирационалното уравнението $x - 2\sqrt{x} = 3$. Оттук получаваме $2\sqrt{x} = x - 3$.

Припомняме на учениците методите за решаване на ирационални уравнения от основния вид $\sqrt{f(x)} = g(x)$, а именно: 1) директно повдигане в квадрат на двете страни на уравнението, решаване на полученото рационално уравнение (следствие на даденото) и проверка на корените му дали са корени и на даденото уравнение или 2) метод на еквивалентността, чрез който ирационалното уравнение се замества с еквивалентната система от условия

$$\left|\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x). \end{array}\right.$$

По втория начин получаваме

$$\left|\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x^2 - 10x + 9 = 0. \end{array}\right.$$

Корените на квадратното уравнение са $x_1 = 1$ и $x_2 = 9$, като само $x_2 = 9$ удовлетворява и първото условие от системата. Следователно $x = 9$ и $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$.

Завършваме урока със следната задача за три вектора, образуващи ортонормиран базис на тримерното пространство.

Задача 12. Да се докаже тъждеството

$(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3)\vec{e}_3 + (\vec{e}_1 - 3\vec{e}_3)^2 = 3^{\log_4 49.\log_{27} 8}$,

където $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ са единични и взаимно перпендикулярни вектори.

Решение: За преобразуване на лявата страна на тъждеството използваме, че

$\overrightarrow{e_1}^2 = \overrightarrow{e_2}^2 = \overrightarrow{e_3}^2 = 1$ и $\vec{e}_1\vec{e}_2 = \vec{e}_2\vec{e}_3 = \vec{e}_1\vec{e}_3 = 0$. Получаваме последователно

$(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3)\vec{e}_3 + (\vec{e}_1 - 3\vec{e}_3)^2 =$

$= 2\vec{e}_1\vec{e}_2 - \overrightarrow{e_2}^2 + \vec{e}_2\vec{e}_3 - 2\overrightarrow{e_3}^2 + \overrightarrow{e_1}^2 - 6\vec{e}_1\vec{e}_3 + 9\overrightarrow{e_3}^2 = -1 - 2 + 1 + 9 = 7.$

За преобразуване на дясната страна на тъждеството първо обръщаме внимание на учениците, че мога да представят основите на двата логаритъма като степени на числата 2 и 3 и да приложат следнит свойства за изнасяне на степенен показател от аргумента на логаритъма и от основата м $\log_a b^m = m\log_a b$, $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$, където $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $n \neq 0$. Използвайки ги, учениците щ получат $\log_4 49 . \log_{27} 8 = \log_{2^2} 7^2 . \log_{3^3} 2^3 = \frac{2}{2}\log_2 7 . \frac{3}{3}\log_3 2 = \log_2 7 . \log_3 2$, което е равно н $\frac{\log_3 7}{\log_3 2} . \log_3 2 = \log_3 7$. Сега дясната страна приема еквивалентния вид $3^{\log_3 7} = 7$, с което тъждеството доказано.

В края на урока някои от учениците изявиха желание да съставят задачи от подобен вид. На следващот занятие участниците определиха следните две задачи като най-интересни.

Задача 13. За кои стойности на реалното число p векторите $\vec{a}(2^p + \frac{2}{5}; 3.4^p)$ и $\vec{b}(1; 5)$ са колинеарни.

Решение: $\frac{2^p + \frac{2}{5}}{1} = \frac{3.4^p}{5} \Leftrightarrow 5.2^p + 2 = 3.(2^p)^2$. Полагаме $2^p = u > 0$ и достигаме до квадратнот уравнение $3u^2 - 5u + 2 = 0$ с корени $u_1 = 1$ и $u_2 = \frac{2}{3}$, откъдето получаваме $2^p = 1 = 2^0 \Leftrightarrow p_1 = 0$ $2^p = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_2 2^p = \log_2 \frac{2}{3} \Leftrightarrow p_2 = 1 - \log_2 3$.

Задача 14. Намерете стойностите на реалното число m, за които векторите

$\vec{a}(m^3 - 6; 11 - 6m)$ и $\vec{b}(1; m)$ са перпендикулярни.

Решение: От $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow m^3 - 6 + m(11 - 6m) = 0 \Leftrightarrow m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$.

Последното уравнение може да решим по два начина.

1) Със знанията за разлагане на многочлени

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = m^3 - m^2 - 5m^2 + 5m + 6m - 6 =$$

$$= m^2(m - 1) - 5m(m - 1) + 6(m - 1) = (m - 1)(m^2 - 5m + 6) = 0.$$

Получаваме корените му $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$.

2) С използване на знанията от 11. клас.

Според теоремата на Безу, ако едно уравнение с коефициенти цели числа и старши коефициент 1, им за корен цяло число, то този корен е измежду целите делители на свободния член. Тогава възможнит цели корени на полученото уравнение са: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Можем с таблица на Хорнер или непосредствена проверка да потвърдим, че числата $1, 2$ и 3 са корените на уравнението.

References:

1. Galabova, D., M. Siderova. Matematika – 11. klas. Profilirana podgotovka, Vedi, 2020, ISBN 978-954-8857-54-3.
2. Tonov, I. i dr. Matematika – Geometria, profilirana podgotovka, 11. klas. Regalia 6, 2020, ISSN 978-954-745-330-2.