

МАРТИН И ПЕПЕРУДИТЕ

Красимир Николов Коларов
СНЦ „Образование и технологии“, Бургас

MARTIN AND THE BUTTERFLIES

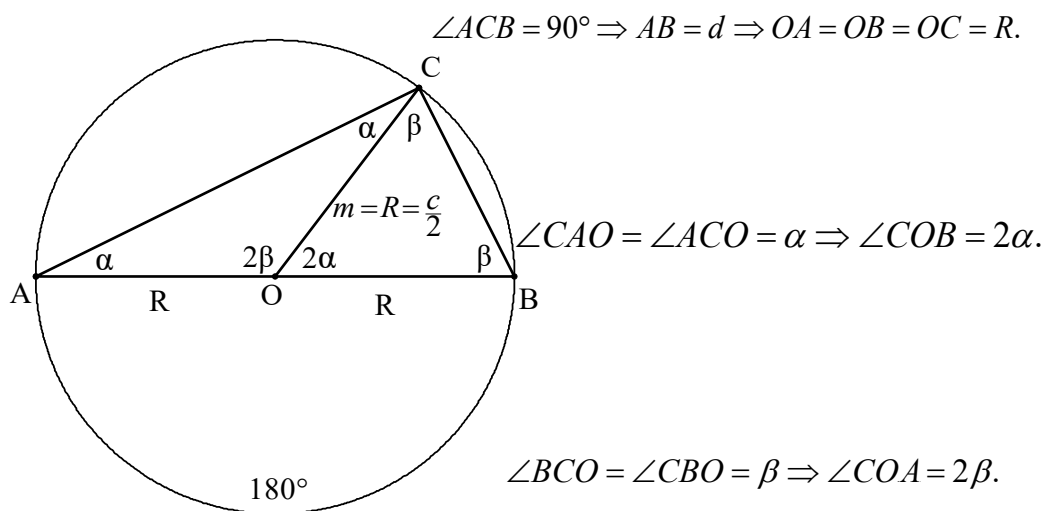
Krasimir Nikolov Kolarov
Education and Technologies Assoc, Burgas

ABSTRACT: The article looks at a fun way to present the geometric content of a lesson so that it becomes more accessible to students. The median theorem in the rectangular triangle is told as a love story.

Keywords: Mathematical education, geometry, rectangular triangle, median.

Коста беше всичко, което Мартин не можеше да е. Висок, поне три и петдесет, рус и светлоок, звезда на баскетболния отбор и фронтмен на училищната банда. Коцето беше любимецът и на момичетата, и на учителите, и дори на момчетата, които скришом хапеха лакти от завист, но кудееха под звуците на магическата му китара. Мартин едва достигна ръста на приятелката си Силвия и все още беше с 14 месеца и 9 дни по-малък от нея. Музикалните му постижения останаха в детската градина, а до спорта се докосваше много рядко и само чрез телевизията. Все още единственото, което Мартин можеше да предложи повече от другите бе умението му да смята и да помага в беда, донякъде хубави неща, но все си е по-добре да си висок като баскетболист и да пееш като Бог.

Винаги е по-мъжкарски да се разкайваш за сбърканото, отколкото да съжаляваш за пропуснатото. Затова Мартин, макар и два класа по-малък, прие предизвикателството да помага на Коста по математика. Първо – помоли го класната, второ – помоли го и Силвия, трето – Мартин също харесваше Коста и не можеше да допусне идолът на училището да има двойка. И така, двете момчета, едното високо, другото не съвсем, трябваше да посветят някой и друг час на нещо толкова прозаично – медианата през върха на правия ъгъл. Коста беше напълно наясно, че във всеки правоъгълен триъгълник, медианата през върха на правия ъгъл има дължина равна на половината от дължината на хипотенузата на триъгълника, но никак не можеше да се усети как да пренесе това си знание върху задачите от домашното.

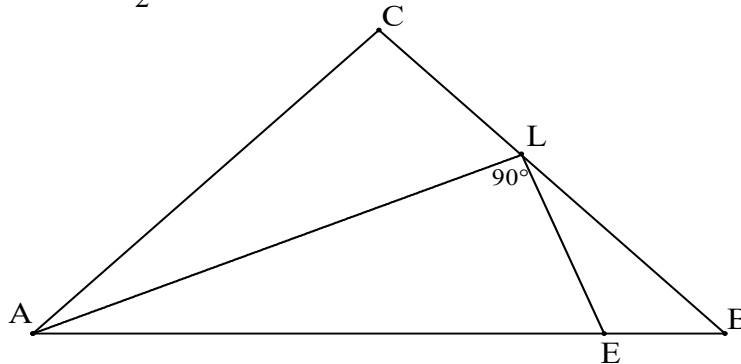


– Виж този чертеж! – Мартин постави като основа теоремата за вписания ъгъл, която и Коста трябваше да си припомни – Щом е прав, то дъгата AB е с мярка 180° и тогава AB е диаметър, а OA , OB и OC са равни като радиуси т.е. теоремата е само част от по-общо свойство. Освен това $\angle OCA = \angle OAC = \alpha$ $\angle OCB = \angle OBC = \beta$

и, според теоремата за външния ъгъл, и Теоремата трябва да помниш дори само като картинка и да търсиш тази картинка в чертежа на задачата – обясняваше Мартин – а чертежът ти трябва да представя адекватно всеки факт от условието на задачата.

– Добре де. Ето я задачата. – Коста приличаше на китарист скъсал струна по време на солова партия. – Ето го и чертежа. И какво? Тия, гадните, даже на са в един триъгълник.

Зад. 1. В триъгълника ABC , $AC = BC$ и AL е ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$. E е точка от AB такава, че $LE \perp AL$. Да се докаже, че $BL = \frac{1}{2}AE$.

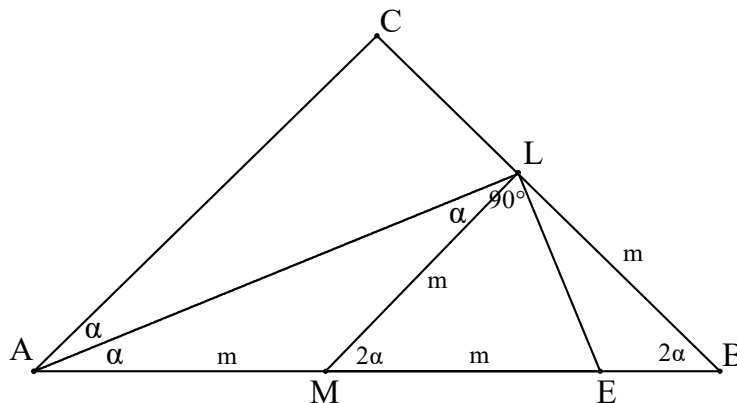


– Хайде да отбележим на чертежа, че AL е ъглополовяща и да поставим по една алфа на ъглите LAC и LAB . Да представим, че триъгълникът е равнобедрен с едно две алфа за ъгъл CBA . Това означава адекватно представяне на условието. Виждаш ли сега правоъгълния триъгълник? – Мартин опитваше какво е да си учител и съвсем мъничко се изкефи на безпомощността на Коста. Завистта е кофти нещо, но понякога е по-яка дори от приятелството.

– Аз съм спортист, не съм идиот. Написал съм даже, че ALE е прав. – Коста вече повиши тон – Триъгълник като триъгълник, ако ще и да е правоъгълен. LB изобщо не е там.

– Е, сега спортистът, колкото и да му е непривично, да си напъне малко и мозъка. Искаме LB да е половината на AE . Не се ли сещаш за нещо, което и без това е половината на AE ?

– Братле, аз май проглеждам стерео. Медианата. Виждам и къде е картинката ти. Цялата. Сега само ще сложа и по едно m на равните отсечки. Ето ти я сега и моята картинка:



Вероятно толкова щастлив е изглеждал само неандерталецът, когато за пръв път се е усетил, че с тоягата може не само да се подпира, а и да се пази и напада, че тя умножава многократно собствените му възможности за оцеляване. Коста беше усетил силата на едно друго оръжие – целенасоченото знание. Защото знанието, само по себе си, е някаква форма на изкуството, но когато знанието е насочено към конкретна цел, то вече е и оръжие.

– Казах ти, че не съм тъпак. Светна ми, че щом AE е хипотенузата на правоъгълен триъгълник, то половината от нейната дължина е дължината на медианата. Построих си и медианата LM и нарисувах всичко, което ми каза за медианата през върха на правия ъгъл, включително и за свойствата на ъглите. То, друго-

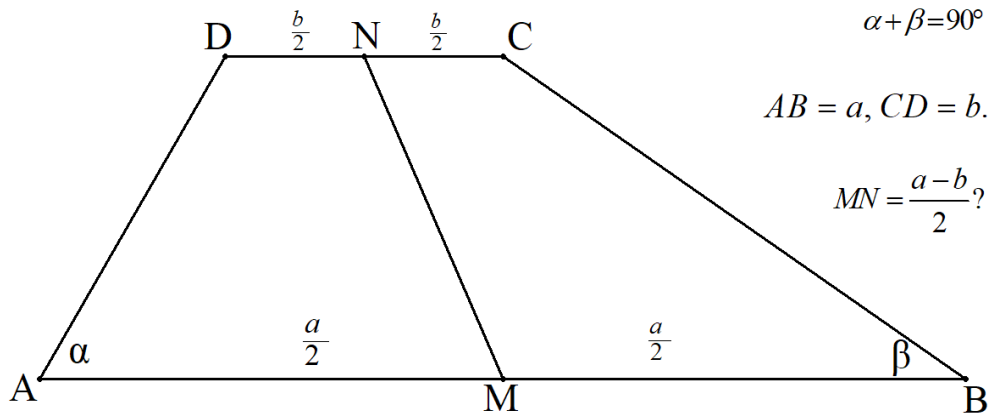
то, е очевидно защото, след като доказахме, че $\sphericalangle LMB = \sphericalangle LBM = 2\alpha$, то $LM = LB = \frac{AE}{2}$ и остава само да запишем решението.

Мартин усети някаква много странна гордост. Наистина, не е ли странно да се радваш повече на успе-

ха на този, комуто си помогнал, отколкото на собствения си успех. Момчето по-добре започна да разбира собствените си учители. Те, очевидно, не работеха само за малките си заплати. Та чистачката в пекарната на Мартиновите родители получаваше повече пари от учителката му по математика. Но успехите на Мартин, на Силвия, Коста и всичките им приятели бяха вероятно най-важното нещо в учителската им работа, а и в живота им. Нещо, което напълно ги възмездява за по-малко модните им дрехи, за пропуснатата почивка или за несъстоятелата се екскурзия. То, щастието, истинското щастие, външно погледнато, не винаги прилича на щастие, но е толкова хубаво, когато имаш сърце да го разпознаеш.

– Дали да не взема да опитам втората задача сам. – За Коста морето вече беше до колене – Ето, виж я и нея:

Зад. 2. Сумата от острите ъгли на трапеца $ABCD$ е 90° . Докажете, че дължината на отсечката, съединяваща средите на двете основи е равна на полуразликата от дължините на тези основи.



Ентусиазмът на нетъпака Коста се изпари доста бързо и тъгата отново обзе нежната му музикантска душа. Може да е скапано, но в морето трябва да се плува, даже да е до колене.

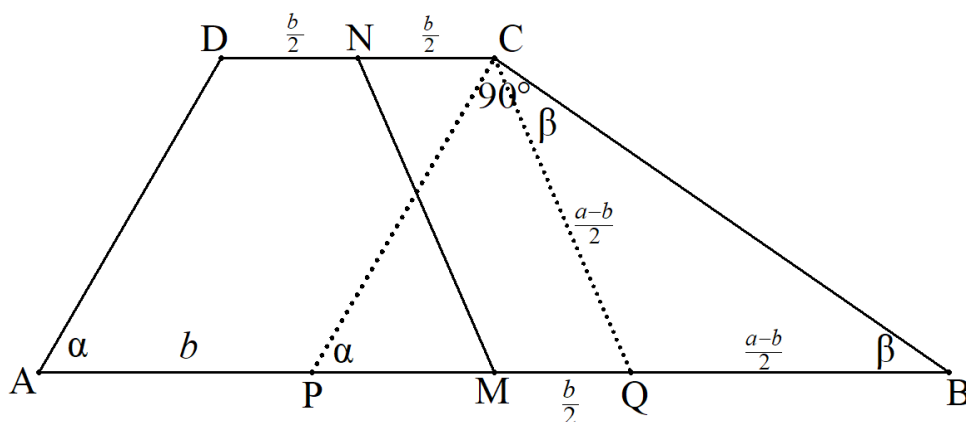
– Ама това е трапец. Каква медиана, какви пет лева. Нали само триъгълниците имат медиани? Търся си картинката, но не виждам нищо, нищо, нищо. Не може да съм толкова тъп?

– Вероятно не си. Музиката има много общо с математиката. Ако ставаш за музикант... – Мартин уж се пошегува, но може би не съвсем. – Хайде да огледаме условието по-внимателно. Жокер едно – Какво ли означава, че сумата на два ъгла е деветдесет градуса?

– Ако беше триъгълник, щеше да е правоъгълен, но това е един гаден трапец. – Коста продължи да си търси картинката, но триъгълник така и не се появи. Тъжният опит на момчето Мартин от собствените му битки го бе научил, че когато нещо отива на зле, то най-вероятно е да си продължи в същата посока, колкото и да се опитваме да го насочим към нещо по-добро. Въпреки това, вече учителят Мартин нямаше и мисъл да се предава. Защото беше усетил най-важното в мисията си – ученикът винаги може да успее. Ако учителят му го желае много силно.

– Помисли как да вкараме двата ъгла в един триъгълник, но нека да разгледаме и втория жокер. Дали не можем да открием отсечка, която има дължина $\frac{a-b}{2}$ и да търсим равенство с MN ?

– Спомням си друга задача. Ако построим отсечката $CP \parallel AD$, то $APCD$ е успоредник.



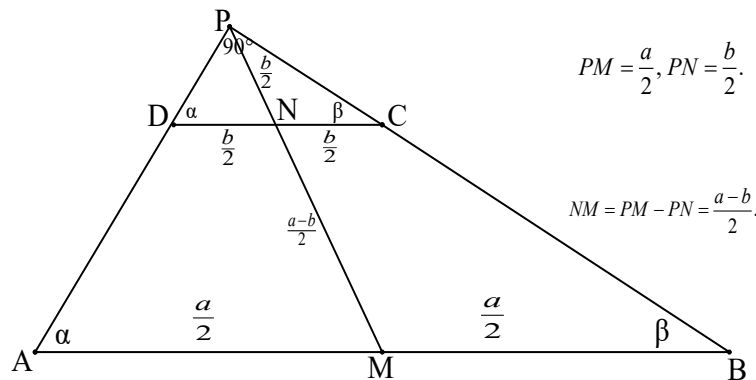
Тогава $AP = b$ и $BP = a - b$.

– AB пресича успоредните прави AD и CP – на Мартин още и даже още повече му харесваше да е учител. – Не виждаш ли триъгълника.

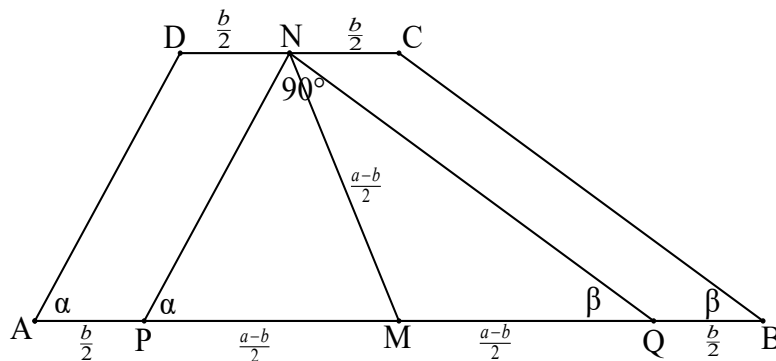
– Да, бе. Ъгъл VPD също е алфа и триъгълникът VPC е моят човек. И, разбира се, медианата му CQ е $\frac{a-b}{2}$. Значи, трябва да докажа, че $MN = CQ$. – В Коста отново се разгоря амбицията да влезе в отбора на умниците. – Фасулска работа. $MQ = BM - BQ = \frac{a}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{b}{2}$. $MQCN$ е успоредник. *Търърърдааам. Да влезе убитият.*

– Дали не можем да потърсим друго решение? Второто решение ще ни даде по-общ поглед към задачата. Както в музиката. Кавърът понякога превъзхожда оригинала. Използвай същите опорни моменти – правоъгълният триъгълник и отсечката $\frac{a-b}{2}$.

– Абе това го видях в самото начало, но си притряях, да не стана смешен. Ако продължим бедрата на трапеца до пресичането им в точка P и използваме, че PM и PN са медиани в правоъгълни триъгълници. На картинката всичко е О.К. Обаче ми изглежда прекалено лесно за да е вярно. Ако N не лежи на PM и ми се разказа играта.



– Ами, мъжки, ти откри теоремата на Щайнер. Точките P , M и N наистина лежат на една права. И пресечната точка на диагоналите, и тя е върху PM . Май не е толкова кофти да съм ти даскал. Това решение е супер. Ето го и моят подарък за теб. Просто гледай.



– Марто, това направо ме кефи. Много е яко. Направо си е красиво. Чудех се как е възможно нормален човек да харесва геометрията. Май и аз не съм много нормален.

– Сигурно не си, Косьо, но домашната вече я написахме. Ето ти я сега моята домашна. Не забравяй – важно е да представиш условието на задачата адекватно на чертежа, да помислиш какво можеш да намериш с дадените величини, какво ти е необходимо, за да намериш търсеното. Разшири си картинката докрай. Гледай стерео!

Зад. 3. Височината към хипотенузата в правоъгълен триъгълник е с дължина 9 и разполовява една от ъглополовящите на острите му ъгли. Да се докаже, че лицето на триъгълника е $54\sqrt{3}$.

Зад. 4. В остроъгълен $\triangle ABC$ точката D е петата на височината през върха A , H е ортоцентъра на триъгълника, а M и N са средите на AB и CH . Да се намери лицето на $\triangle MDN$, ако $AB = 4$ и $\angle ACB = 30^\circ$.

Отговор. $2\sqrt{3}$.

Едва ли е необходимо да продължаваме кой знае колко нашия разказ. Коста изкара четворка, после и петица, но едно нещо остана трайно и много по-важно – приятелството. И когато цялото училище се събра във физкултурния салон да слуша групата на Коста и да танцува, нямаше как фронтменът да не каже и това:

– Следващата песен се казва „Приятелство“, и ще я чуете за първи път. Това е и първият ни авторски опит. Посвещаваме го на моя приятел Мартин и на гаджето му Силвия – думите на Коста накараха Мартин, за миг, да се чувства специален и важен. Когато прегърна момичето си по средата на импровизирания дансинг, под ръкоплясканията на съучениците им, той за пореден път усети какво е да си щастлив, но и това, че щастието никога не идва от само себе си.

– Страх ме е. – промълви като че на себе си момчето – Ти си толкова хубава, а аз съм толкова обикновен.

– Глупчо! – Силвия се смееше някак си цялата. И устните ѝ, и очите ѝ, и ушите ѝ, ръцете ѝ, тялото ѝ чак до маратонките. Тогава Мартин усети пеперудите. За първи път. Онези в стомаха. Разбра, че ще обича Силвия винаги, независимо от всичко. Че цял живот ще се страхува да не я загуби и това няма как да се промени. И трябва всяка минута да се бори за любовта, за своята и за нейната. Пърхането на нежните пеперуди, пръснати сега по цялото му тяло, беше сигналът, че той е вече готов за това.

Този разказ е неразделна част от една цяла история за математическите дейности на Мартин и първите глави на тази история могат да се намерят под номера от [1] до [3] в последващия списък с ползвана литература.

References:

1. Kolarov K. 2014 Martin, mamulite i matematicheskoto modelirane. *Образование i tehnologii*. kn. 5/2014 str 275–280. http://www.itlearning-bg.com/magazines/Spisanie2014/resources/spisanie_e_book_2014.pdf
2. Kolarov K. 2015 Martin, hlyabat i uravnenieto na razhodite. *Образование i tehnologii*. kn. 6/2015 str 257–261. http://www.itlearning-bg.com/magazines/Spisanie2015/resources/spisanie_e_book_2015.pdf
3. Kolarov K. 2016 Martin, shezlongite i nelineynoto modelirane. *Образование i tehnologii*. kn. 7/2016 str 228–231. http://www.itlearning-bg.com/magazines/Spisanie2016/resources/spisanie_e_book_2016.pdf