ОБОБЩАВАНЕ НА ОЛИМПИЙСКИ ЗАДАЧИ ЧРЕЗ ДИНАМИЧЕН СОФТУЕР

Сава Иванов Гроздев[1], Веселин Ненков Ненков[2]
[1]City College, University of Sheffield
[2]Висше военно-морско училище, Варна

GENERALIZATION OF OLYMPIAD PROBLEMS WITH DYNAMIC SOFTWARE

Sava Grozdev[1], Veselin Nenkov[2]
[1]City College, University of Sheffield
[2]Nikola Vaptsarov Naval Acedamy, Varna

Abstract: Various meaningful generalizations could be obtained after gaining insight into some mathematical assertions from different points of view. Generalizations of two problems from International Mathematical Olympiad papers are shown when the details are combined with the opportunities of the program software „THE GEOMETER'S SKETCHPAD" (GSP).
Keywords: triangle, circumscribed circle, in-circle, conic, GSP.

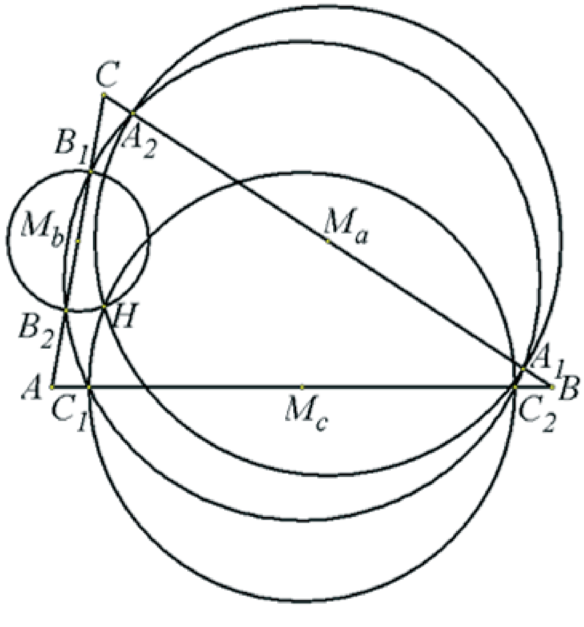
Естествен стремеж на всеки изследовател е да формулира и докаже във възможно най-обща форма своите твърдения или да обобщи твърдения на други изследователи. Различните форми на обобщаване са разгледани подробно в [1] и обединяващото в тях е разбирането на обобщението като мислено обединяване на предмети и явления по техни съществени признаци. При най-простите обобщения обединението е въз основа на отделни случайни признаци, при по-сложните се държи сметка на основанията за обединението, а при най-сложните се осъществява извеждане на видови и родови признаци и съответният обобщаван обект се включва в система от понятия. Във всички случаи е необходимо добро познаване и проследяване на свойства и връзки, придружени с изобретателност и активно включване на едни от най-важните мисловни операции, каквито са анализът и синтезът. Твърде често самите проследявания, анализи и синтези са съпроводени с технически трудности и невъзможността за тяхното преодоляване води до неуспех. Една положителна възможност е свързана с използването на информационни технологии.

Тук ще покажем участието на динамичния софтуер „THE GEOMETER'S SKETCHPAD" (GSP) при обобщаване на две задачи, включени в темите на международни математически олимпиади. Тези задачи заслужават специално внимание, основно поради своята съдържателност. От своя страна обобщенията могат да се реализират различни начини.

Задачите, които ще изследваме и обобщим с помощта на GSP, са следните:

Задача 1. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H. Окръжността с център средата на страната BC и минаваща през H пресича правата BC в точки A_1 *и* A_2. *Аналогично, окръжността с център средата на страната CA и минаваща през H пресича правата CA в точки* B_1 *и* B_2, *а окръжността с център средата на страната AB и минаваща през H пресича правата AB в точки* C_1 *и* C_2. *Да се докаже, че точките* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 *и* C_2 *лежат на една окръжност. (Фиг. 1)*

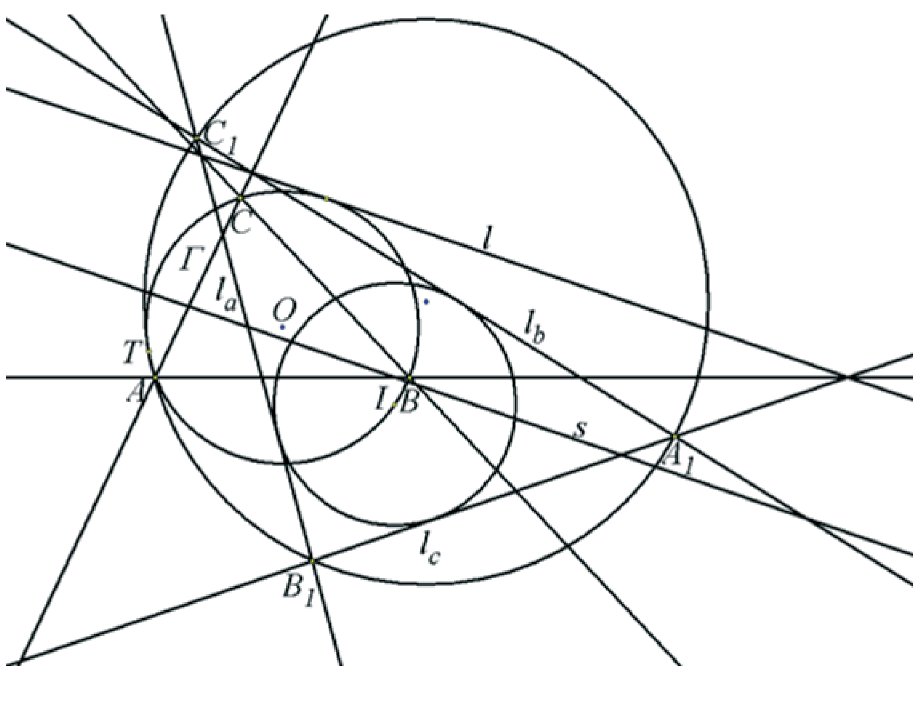
Тази задача е от 49-та Международна математическа олимпиада, проведена в Испания през 2008 г.



Фигура 1. Чертеж към Задача 1

Задача 2. Нека l е допирателна към описаната окръжност Γ на остроъгълен триъгълник ABC. С l_a, l_b и l_c са означени симетричните прави на l съответно спрямо правите BC, CA и AB. Да се докаже, че описаната окръжност около триъгълника, образуван при пресичането на l_a, l_b и l_c, се допира до Γ. (Фиг. 2)

Тази задача е от 52-та Международна математическа олимпиада, проведена в Нидерландия през 2011 г. [2]



Фигура 2. Чертеж към Задача 2

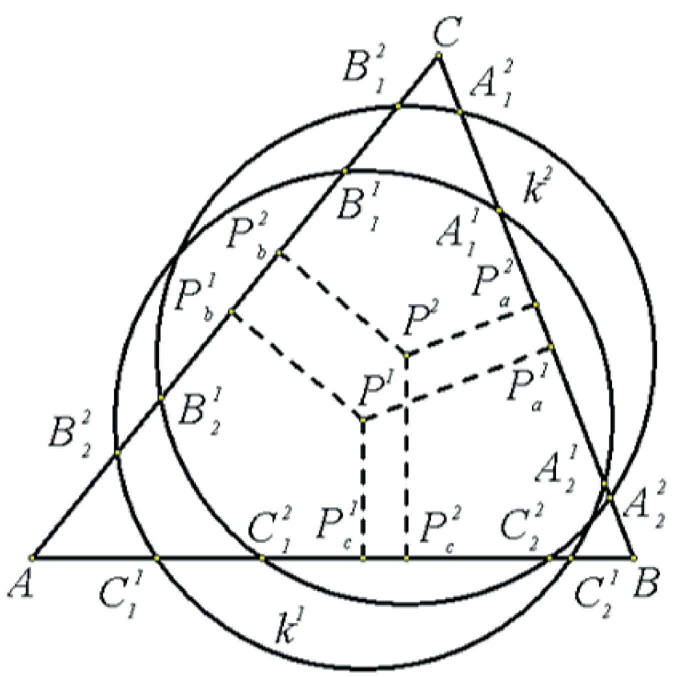
Ще обобщим формулираните задачи по два различни начина.

I. Обобщения с окръжности. В тази част ще изследваме дадените елементи и връзки между тях в условията на задачите така, че да получим окръжности, обобщаващи окръжностите, които са крайната цел във формулираните задачи.

I.1. Окръжности, породени от изогонално спрегнати точки. С помощта на GSP ще анализираме условието на задача 1 по следния начин. Центровете M_a, M_b и M_c (средите съответно на страните BC, CA и AB) на окръжностите, пораждащи точките A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2, са ортогоналните проекции на центъра O на описаната окръжност Γ за ΔABC, а общата им точка е ортоцентърът H. Сега можем да обърнем нещата, като за центрове на окръжностите разгледаме ортогоналните проекции на H, а за тяхна обща точка вземем центъра O. Получените по този начин шест точки лежат на една окръжност. Нещо повече, тази окръжност е еднаква с окръжността, която се получава в първоначалната ситуация.

Да обърнем внимание, че точките O и H не са само забележителни точки за ΔABC, а са и изогонално спрегнати спрямо ΔABC. Това дава основание да предположим, че ако произволни изогонално спрегнати спрямо ΔABC точки P и Q си разменят ортогоналните проекции по начина, по който го правят точките O и H, биха се получили две шесторки точки, които лежат на две еднакви окръжности. Експериментите с GSP показват, че това предположение е вярно и може да се формулира по следния начин:

Теорема I.1. *Нека P^1 и P^2 са изогонално спрегнати точки спрямо даден триъгълник ABC, а точките P_a^j, P_b^j, P_c^j са ортогоналните проекции на P^j $(j=1,2)$ съответно върху правите BC, CA и AB. Ако окръжността с център точката P_a^j и минаваща през P^s $(j \neq s = 1,2)$ пресича правата BC в точки A_1^j и A_2^j, а двойките точки B_1^j, B_2^j и C_1^j, C_2^j са определени по аналогичен начин върху правите CA и AB, то точките A_1^j, A_2^j, B_1^j, B_2^j, C_1^j и C_2^j $(j=1,2)$ лежат върху две еднакви окръжности с центрове в точките P^1 и P^2. (Фиг. 3)*



Фигура 3. Чертеж към Теорема I.1.

I.2. Окръжности, породени от снопове прави. **С помощта на** GSP ще получим обобщение на задача 2, като в началото ще отбележим друга нейна формулировка. Във връзка с това ще припомним две свойства на ортоцентъра H на ΔABC.

Нека k_a, k_b и k_c са описаните окръжности съответно за триъгълниците BCH, CAH и ABH. Ще потърсим някои връзки на тези окръжности с произволна допирателна l за Γ.

1) Симетричната точка на H спрямо правата BC лежи върху Γ [3]. Следователно окръжността, симетрична на k_a спрямо BC, е Γ. Затова, при симетрия спрямо BC допирателната l на Γ се преобразува в допирателна l_a към k_a. По аналогичен начин забелязваме, че правите l_b и l_c, симетрични на l съответно спрямо CA и AB, са допирателни съответно към k_b и k_c.

2) Ако s е произволна права през H, а правите s_a, s_b и s_c са симетричните образи на s съответно спрямо правите BC, CA и AB, то s_a, s_b и s_c минават през точка P от Γ [4], [5]. Затова при симетрия спрямо BC точката P се преобразува във втората пресечна точка H_a на k_a и s. Следователно, ако l е допирателната на Γ в точката P ($P = s_a \cap l$), правата l_a е допирателна на k_a в точката H_a. Аналогич-

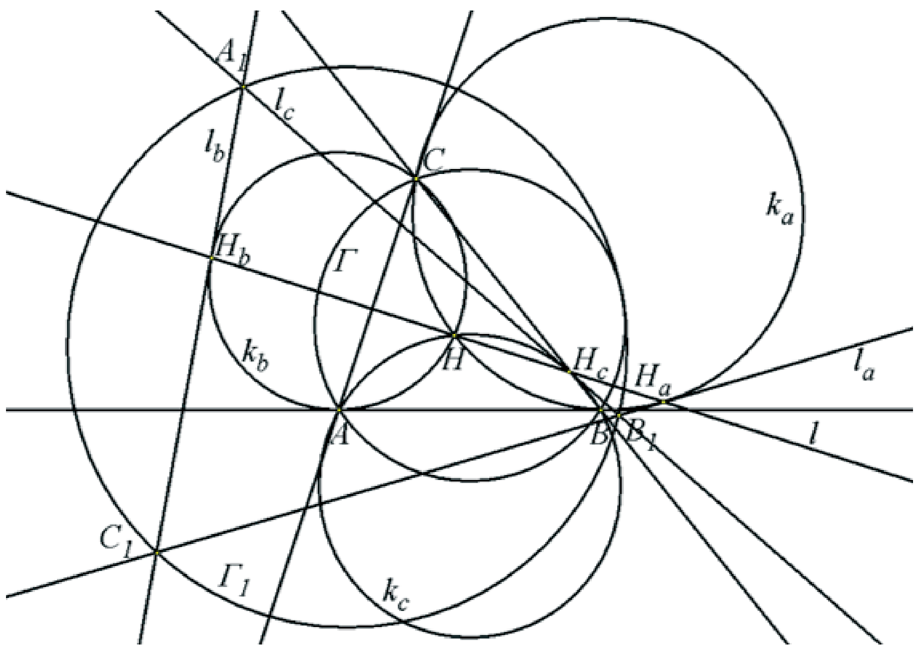
но установяваме, че ако вторите пресечни точки на s с k_b и k_c са съответно H_b и H_c, правите l_b и l_c се допират съответно до k_b и k_c в H_b и H_c.

От направените наблюдения следва, че олимпиадната задача може да се формулира по следния по-различен начин:

Задача 2.1. *Нека H е ортоцентърът на неправоъгълен триъгълник ABC с описана окръжност Γ, а k_a, k_b и k_c са описаните окръжности съответно за триъгълниците BCH, CAH и ABH. Права l през H пресича тези окръжности за втори път съответно в точките H_a, H_b и H_c. Ако правите l_a, l_b и l_c са допирателни към k_a, k_b и k_c съответно в точките H_a, H_b и H_c, то описаната окръжност около триъгълника, образуван при пресичането на l_a, l_b и l_c, се допира до Γ.*

Сега по естествен начин възниква следният въпрос: Какво ще се случи, ако ортоцентърът H се замени с произволна точка H в равнината на произволен триъгълник ABC? Тук можем да ускорим придвижването от зададения въпрос до получаване на неговия отговор във вид на хипотеза, като използваме конструктивните и динамични възможности на програмата GSP. Наблюденията с GSP показват, че твърдението в задача 2.1 остава вярно и при произволна точка H. Така вече можем да формулираме следното обобщение на задача 2.1, а следователно и на олимпиадната задача, във следния вид:

Теорема I.2. *Нека H е точка от равнината на триъгълник ABC с описана окръжност Γ, която не лежи върху BC, CA, AB и Γ, а k_a, k_b и k_c са описаните окръжности съответно за триъгълниците BCH, CAH и ABH. Права l през H пресича тези окръжности за втори път съответно в точките H_a, H_b и H_c. Ако правите l_a, l_b и l_c са допирателни към k_a, k_b и k_c съответно в точките H_a, H_b и H_c, то описаната окръжност Γ_1 около триъгълника, образуван при пресичането на l_a, l_b и l_c, се допира до Γ. (Фиг. 4)*



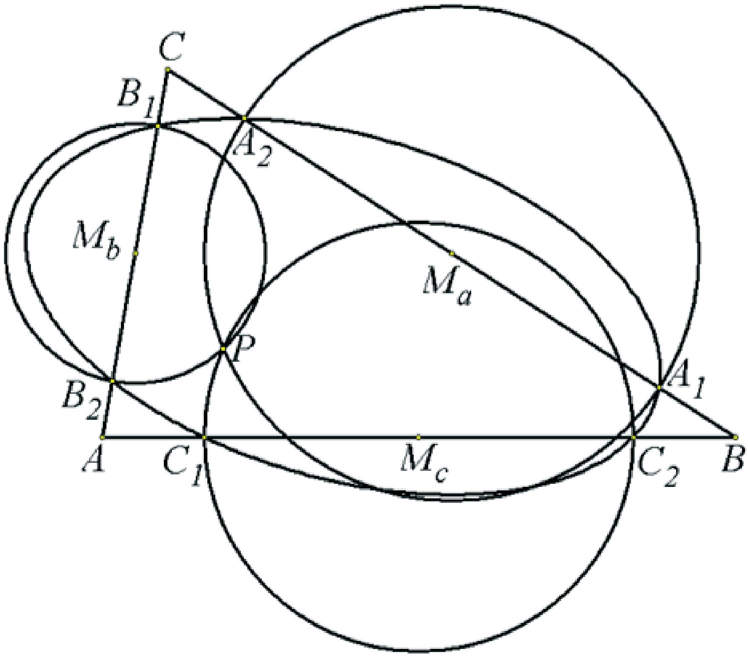
Фигура 4. Чертеж към Теорема I.2.

II. Обобщения с криви от втора степен. Всяка окръжност е специален вид крива от втора степен. Затова ще потърсим обобщения на формулираните задачи с криви от втора степен.

II.1. **Криви, породени от произволна точка в равнината на триъгълник.** Ако заменим ортоцентъра H с произволна точка P от равнината на ΔABC, можем да очакваме, че при същия начин на построение ще се получат шест точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2, които лежат на една крива от втора степен (Фиг. 5). Оказва се, че това предположение е вярно и може да се формулира по следния начин:

Теорема II.1. *Дадени са ΔABC и произволна точка P от равнината му. Ако окръжността с център средата на страната BC и минаваща през P пресича правата BC в точки A_1 и A_2, а двойките точки B_1, B_2 и C_1, C_2 са определени по аналогичен начин върху правите CA и AB, то точките A_1, A_2*

, B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат върху една крива от втора степен $k(P)$, която е окръжност точно когато P е ортоцентърът на ΔABC. (Фиг. 5)



Фигура 5. Чертеж към Теорема II.1.

II.2. **Криви, породени от забележителни точки.** Преди да преминем към търсенето на обобщение на задача 2 с криви от втора степен ще покажем две свойства на определената в нея конфигурация, които на пръв поглед нямат нищо общо с търсенето на обобщение. Нека е даден ΔABC с описана окръжност Γ, чиито център е O и $l_b \cap l_c = A_1$, $l_c \cap l_a = B_1$, $l_a \cap l_b = C_1$. Нека още I е центърът на вписаната окръжност за $\Delta A_1B_1C_1$, а I_A, I_B и I_C са центровете на външно вписаните в $A_1B_1C_1$ окръжности, лежащи съответно в ъглите A_1, B_1 и C_1. Наблюденията с GSP показват, че ако ΔABC е остроъгълен, точката I лежи върху Γ за произволна нейна допирателна l (Фиг. 1). Нещо повече, ако се откажем от свойството на l да е допирателна, за произволна права l от равнината на ABC забелязваме, че вече наблюдаваното свойство на I остава в сила. Ако ΔABC е тъпоъгълен, върху Γ лежи тази от точките I_A, I_B и I_C, която съответства на тъпия ъгъл на ΔABC, съдържащ O. Така получаваме следното:

Твърдение II.1. *За произволна права l от равнината на ΔABC, точно един от центровете I, I_A, I_B и I_C на вписаните в $\Delta A_1B_1C_1$ окръжности лежи върху Γ.*

По-нататък спрямо дадения триъгълник ABC ще използваме барицентрични координати, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ [2]. С $A_0\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $B_0\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ и $C_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ означаваме средите съответно на *BC*, *CA* и *AB*. Аналогично разглеждаме барицентрични координати и спрямо $\Delta A_1B_1C_1$, при $A_1(1,0,0)$, $B_1(0,1,0)$ и $C_1(0,0,1)$. Наблюденията с GSP показват, че е изпълнено следното:

Твърдение II.2. *Тази от точките I, I_A, I_B и I_C, която лежи върху Γ, има координати спрямо $A_1B_1C_1$ които съвпадат със съответните координати на O спрямо ABC.*

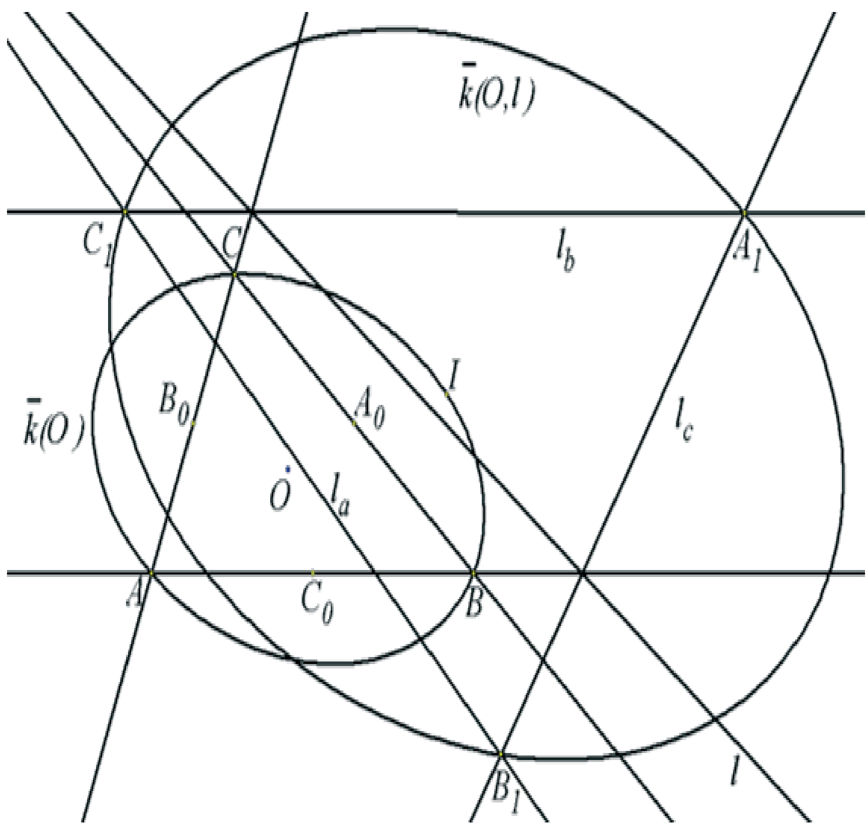
Преминаваме към търсене на обобщение на формулираната в началото задача 2. В търсеното обобщение заменяме окръжността Γ с описана за ΔABC крива от втора степен $\bar{k}(O)$, която има за център точка O. Освен това нека l е произволна права от равнината на ABC. По-нататък обобщението трябва да притежава следните две свойства: 1) Правите l_a, l_b и l_c трябва да се получават от l по такъв начин, че когато $\bar{k}(O) \equiv \Gamma$, те трябва да преминават в правите, симетрични на l съответно спрямо *BC*, *CA* и *AB*. Следователно тези прави зависят от $\bar{k}(O)$, т.е. от центъра O. 2) От всички описани за $\Delta A_1B_1C_1$ криви от втора степен да се подбере такава, която еднозначно е определена от O и l. Тази крива в частност трябва да преминава в описаната окръжност за същия триъгълник, когато $\bar{k}(O) \equiv \Gamma$.

Нека правата l пресича *BC*, *CA* и *AB* съответно в точките A', B' и C'. Ако l_a е симетрична на l спрямо *BC*, то *BC* е ъглополовяща на единия от ъглите между l и l_a. Ъглополовящата на другия ъгъл между тези прави също е ос на симетрия за l и l_a. Тази ъглополовяща е успоредна на симетралата на *BC*. Следователно правата l_a е хармонично спрегната на l спрямо ъглополовящите на ъглите в точката A' между l и *BC*. Това ни дава основание, когато O е произволна точка от равнината на ABC (тя е център на единствено описано за ABC конично сечение $\bar{k}(O)$), в точката A' да построим права l'_a, успоредна на диаметъра OA_0 за $\bar{k}(O)$. Сега определяме правата l_a като хармонично спрегнатата на l спрямо *BC* и l'_a. По аналогичен начин в точките B' и C' определяме съответно правите l_b и l_c. Така построените прави изпълняват свойство 1). Нека $l_b \cap l_c = A_1$, $l_c \cap l_a = B_1$, $l_a \cap l_b = C_1$. Сега остава да определим крива $\bar{k}(O,l)$, описана около $\Delta A_1B_1C_1$, така че да притежава свойство 2). За целта ще използваме твърдение II.2. Нека $O(x_0, y_0, z_0)$ е определена спрямо ABC. Можем да очакваме, че точката $I(x_0, y_0, z_0)$, определена спрямо $\Delta A_1B_1C_1$ (както в частния случай и тук имаме $A_1(1,0,0)$, $B_1(0,1,0)$ и $C_1(0,0,1)$), е център на някаква вписана за $\Delta A_1B_1C_1$ крива, която в частност преминава във вписана окръжност на $\Delta A_1B_1C_1$. Основание, че сме попаднали на правилната точка I, ни дава наблюдението с GSP, което показва, че се получава обобщение на твърдение II.1 в следния вид:

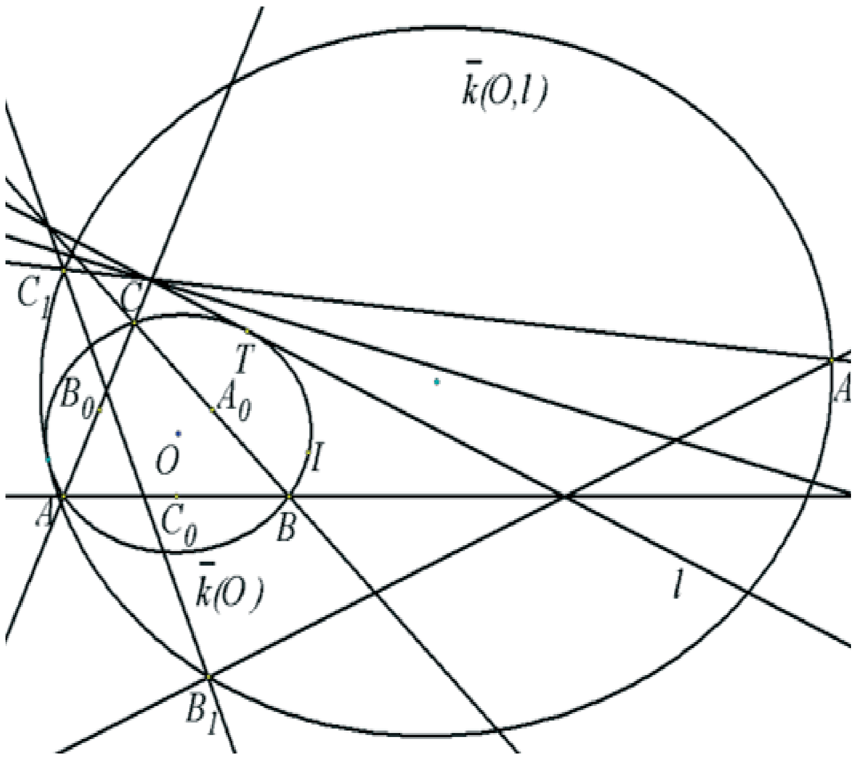
Твърдение II.3. *Точката $I(x_0, y_0, z_0)$, определена спрямо $\Delta A_1B_1C_1$, лежи върху кривата $\bar{k}(O)$.*

Вписаната в $\Delta A_1B_1C_1$ крива с център I от своя страна трябва да определя еднозначно крива $\bar{k}(O,l)$, описана за $\Delta A_1B_1C_1$. Такава крива, както е показано в [6], се получава чрез спрегнатия триъгълник $I_AI_BI_C$ на I спрямо $\Delta A_1B_1C_1$. По-точно кривата $\bar{k}(O,l)$ минава през средите на отсечките II_A, II_B, II_C, I_BI_C, I_CI_A и I_AI_B. Така по точката I еднозначно се определя крива $\bar{k}(O,l)$, описана за $\Delta A_1B_1C_1$. Сега, като извършим описаните конструкции с програмата GSP, можем да изследваме разположението на кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{k}(O,l)$ в зависимост от правата l и да проверим дали наистина сме получили обобщение. В това, че наистина сме получили обобщение, се убеждаваме, като направим съответните построения в случая, когато l се допира до $\bar{k}(O)$. Забелязваме, че криватата $\bar{k}(O,l)$ се допира до $\bar{k}(O)$. Нещо повече, ако l е произволна права от равнината на ΔABC, наблюденията с GSP показват, че можем да формулираме следната

Теорема II.2. *Ако според взаимното си разположение $\bar{k}(O)$ и l се определят като пресекателни, допирателни или без общи точки, то съответното взаимно разположение на $\bar{k}(O,l)$ и $\bar{k}(O)$ е пресичане в две крайни точки, допиране в една крайна точка и липса на общи крайни точки. (Фиг. 6)*



Фигура 6. Чертеж към Теорема II.2.



Фигура 7. Чертеж към Следствие от Теорема II.2 – Следствие.

От това твърдение непосредствено получаваме следното

Следствие. *Кривите* $\bar{k}(O)$ *и* $\bar{k}(O,l)$ *се допират в крайна точка точно когато* l *и* $\bar{k}(O)$ *са допирателни. (Фиг. 7)*

Това следствие представлява обобщение на задача 2 с криви от втора степен.

В заключение трябва да се отбележи, че е необходимо формулираните обобщения да се докажат строго математически. Обобщенията на задача 1 (Теорема I.1 и Теорема II.1) са доказани в [7]. В [7] са показани и други начини на разсъждения върху условието на задача 1. Някои от тях са свързани с четириъгълници, а други – с пространствени варианти. Доказателството на теорема I.2 се съдържа в [8], а доказателството на теорема II.2 – в [9]. Относно обобщенията на задача 2 трябва да се отбележи, че освен във формулировките на получените обобщения GSP се използва активно и в търсенето на техните доказателства. В доказателството на теорема II.1 GSP се използва за търсене на насочващи действия, които да подскажат етапи от самото доказателство.

References:

1. Smaling, A., Inductive, Analogical and Communicative Generalization, International Journal of Qualitative Methods, 2 (1), Winter, 2003, 1–31.
2. Grozdev, S. Mezhdunarodna olimpiada po matematika. Matematika plyus, 3, 2011, 56–59.
3. Paskalev, G., I. Chobanov. Zabelezhitelni tochki v triagalnika. Narodna prosveta, Sofia, 1985.
4. Prasolov, V. Zadachi po planimetrii. Chast I. Moskva: Nauka, 1986, 154, zad. 9.23.
5. Sharыgin, I. (1986). Zadachi po geometrii. Planimetria. Moskva: Nauka, 1986, 52, zad. 139.
6. Nenkov, V., Obobshtenie na teoremata na Foyerbah, Matematika i informatika, 2, 2008, 35–42.
7. Grozdev, S., V., Nenkov. Okolo ortotsentara v ravninata i prostranstvoto. Sofia: Arhimed 2000, 2012.
8. Grozdev, S., V. Nenkov. Edna zabelezhitelna tochka na triagalnika. Matematika i matematichesko obrazovanie, 41, 2012, 330–337.
9. Grozdev, S., V. Nenkov. Dopiratelni okrazhnosti, porodeni ot intsidenti tochka i prava, Matematika i informatika, 2, 2012, 151-160.